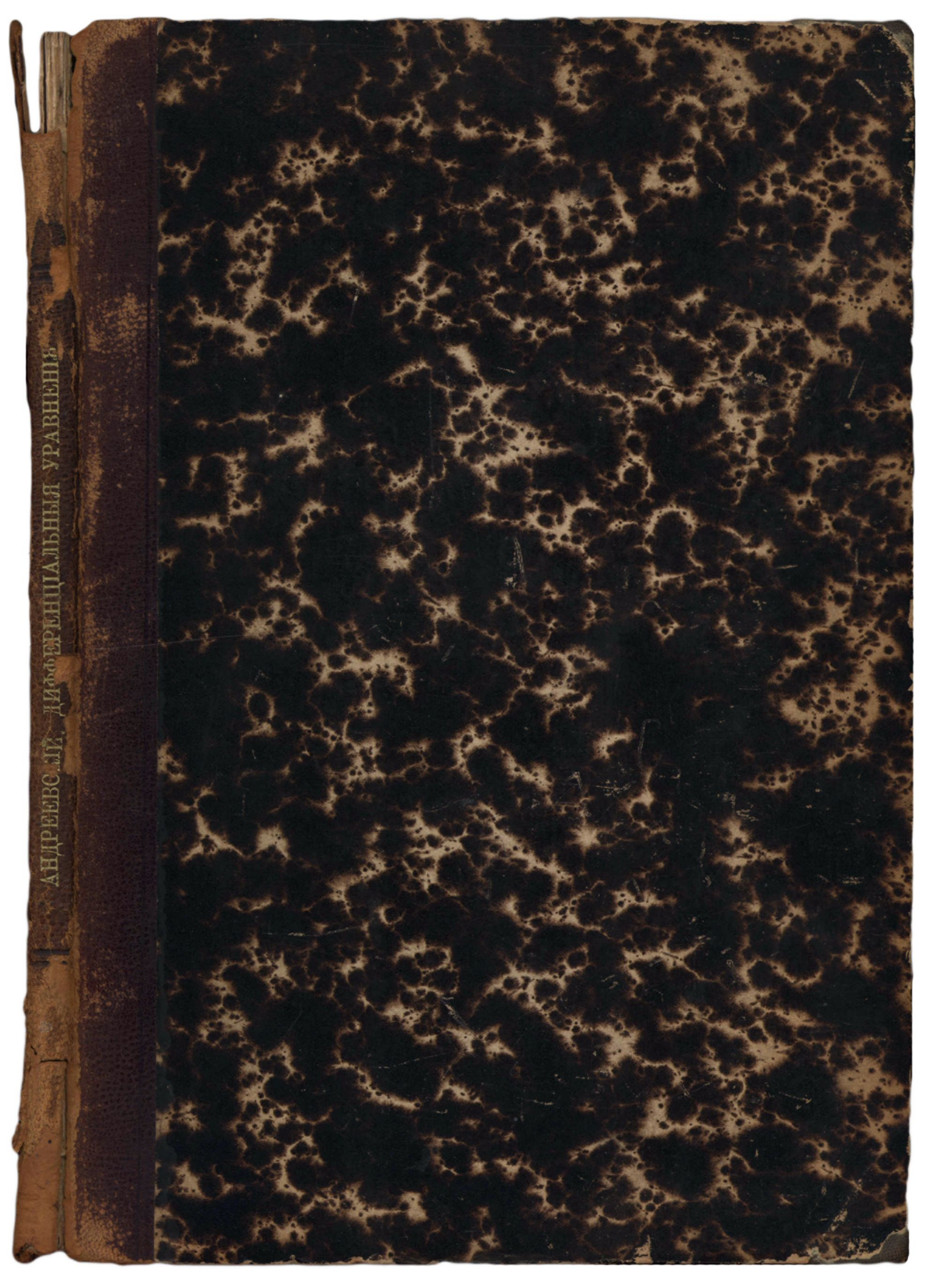

АНДРЕЕВЪ
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ



ОБЪ ИНТЕГРИРУЮЩЕМЪ МНОЖИТЕЛѢ

# ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ

## 2-го ПОРЯДКА, ВИДА:

$$A + By' + Cy'^m + Dy'^{m+1} + Ey'^{m-1}y'' = 0$$



## ДИССЕРТАЦІЯ

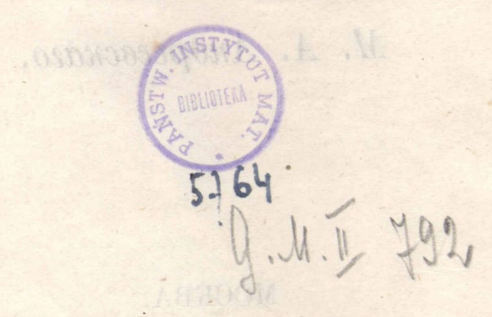
НА СТЕПЕНЬ МАГИСТРА МАТЕМАТИКИ

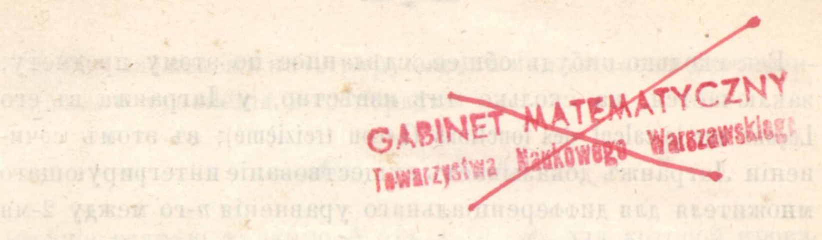
*М. А. Андреевскаго.*

МОСКВА.
Типографія А. И. Мамонтова и К°, Большая Дмитровка, № 7.
1869.

По опредѣленію физико-математическаго факультета Императорскаго Московскаго университета печатать дозволяется.

*Деканъ А. Давидовъ.*






# ОБЪ ИНТЕГРИРУЮЩЕМЪ МНОЖИТЕЛѢ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ 2-ГО ПОРЯДКА, ВИДА:

$$A+By'+Cy'^{m}+Dy'^{m+1}+Ey'^{m-1}y''=0.$$

---

М. А. Андреевскаго.

---

Вопросъ объ интегрирующемъ множителѣ дифференціальныхъ уравненій есть безспорно одинъ изъ важнѣйшихъ вопросовъ анализа.

Самый естественный методъ для интегрированія дифференціальныхъ уравненій есть методъ интегрирующаго множителя, но къ сожалѣнію разысканіе этого послѣдняго, говоря вообще, такъ же трудно, какъ и интегрированіе самаго уравненія.

Тѣмъ не менѣе есть классы дифференціальныхъ уравненій къ которымъ способъ интегрирующаго множителя примѣняется съ успѣхомъ. Главные изъ этихъ классовъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка были указаны еще Эйлеромъ.

Послѣ того Дерптскій профессоръ Миндингъ открылъ новое средство для разысканія интегрирующаго множителя дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка, основанное на знаніи частныхъ рѣшеній этихъ уравненій.

Но вопросъ объ интегрирующемъ множителѣ дифференціальныхъ уравненій выше 1-го порядка еще очень мало изученъ.

Все сколько-нибудь общее, сдѣланное по этому предмету, заключается, на сколько мнѣ извѣстно, у Лагранжа въ его Leçons sur le calcul des fonctions (Leçon treizième); въ этомъ сочиненіи Лагранжъ доказываетъ существованіе интегрирующаго множителя для дифференціальнаго уравненія $n$-го между 2-мя измѣняемыми и разсматриваетъ общую форму интегрирующихъ множителей.

При изслѣдованіи этихъ вопросовъ авторъ аналитической механики предполагаетъ найденными первые интегралы дифференціальнаго уравненія и потомъ замѣчаетъ, что было бы важно умѣть находить эти интегралы à posteriori посредствомъ интегрирующихъ множителей, но что это одна изъ тѣхъ задачъ на общее рѣшеніе которыхъ нельзя надѣяться.

Если же задача о разысканіи интегрирующаго множителя въ общемъ видѣ неразрѣшима, то, намъ кажется, не безъинтересно обратить вниманіе на тѣ частные случаи, въ которыхъ рѣшеніе ея возможно.

Занимаясь изслѣдованіями этого рода, намъ удалось найти нѣсколько удовлетворительныхъ результатовъ для одного класса дифференціальныхъ уравненій 2-го порядка. а именно для уравненій вида:

$$A+By'+Cy'^m+Dy'^{m+1}+Ey'^{m-1}y''=0$$

гдѣ коэффиціенты $A$, $B \ldots E$ суть функціи $x$ и $y$; $x$ перемѣнная независимая, а $m$ число положительное, или отрицательное, цѣлое, или дробное, но отличное отъ нуля.

Изложеніе найденныхъ нами результатовъ и способовъ ихъ полученія и составляетъ предметъ этого разсужденія.

Нѣкоторые изъ полученныхъ нами результатовъ навели насъ на нѣсколько общихъ предложеній относительно интегрирующихъ множителей дифференціальнаго уравненія $n$-го порядка, которыя мы доказываемъ въ концѣ нашего разсужденія.

---

1. Мы называемъ интегрирующимъ множителемъ дифференціальнаго уравненія 2-го порядка

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0$$

вообще всякую функцію $N$ отъ $x,\ y,\ y'$, для которой произведеніе $NF$ будетъ полною производною по $x$ отъ нѣкоторой функціи $x,\ y,\ y'$. Въ частныхъ случаяхъ интегрирующій множитель можетъ не зависѣть отъ $y'$ и мы будемъ имѣть дѣло главнымъ образомъ съ такими случаями.

Всѣ наши изслѣдованія вытекаютъ изъ одной основной теоремы, которая состоитъ въ слѣдующемъ:

*если въ дифференціальномъ уравненіи:*

$$A+By'+Cy'^m+Dy'^{m+1}+Ey'^{m-1}y''=0 \qquad (A)$$

*коэффиціенты тождественно удовлетворяютъ 2-мъ условіямъ:*

$$\frac{d\left(\frac{A}{E}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{B}{E}\right)}{dx}+m\left(\frac{AD-BC}{E^2}\right)=0 \qquad (B)$$

$$\frac{d\left(\frac{C}{E}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{D}{E}\right)}{dx}=0 \qquad (C)$$

*то первый интегралъ этого уравненія получится посредствомъ квадратуръ; интегрирующій множитель уравненія* $(A)$ *будетъ:*

$$M=\frac{1}{E}\,e^{mP},\ \text{гдѣ}\ P=\int\left(\frac{C}{E}\,dx+\frac{D}{E}\,dy\right) \qquad (D)$$

*и первый интегралъ есть въ этомъ случаѣ:*

$$\int M(Adx+Bdy)+\frac{ME}{m}\,y'^m=\alpha \qquad (E)$$

гдѣ $\alpha$ *означаетъ произвольную постоянную величину.*

Ясно, что для доказательства этой теоремы нужно прежде всего искать условія, при которыхъ функція:

$$F=A+By'+Cy'^m+Dy'^{m+1}+Ey'^{m-1}y'' \qquad (1)$$

стоящая въ лѣвой части уравненія ($A$), можетъ быть полною производною отъ нѣкоторой функціи $U=f(x, y, y')$ и потомъ показать, какимъ образомъ при существованіи этихъ условій разыскивается функція $U$. Не касаясь общихъ теорій для этого данныхъ, мы употребимъ сперва частный пріемъ, а именно: возьмемъ функцію вида:

$$X+Yy'^m=V \qquad (2)$$

гдѣ $X$ и $Y$ суть функціи $x$ и $y$, и продифференцируемъ $V$ сполна по $x$; будемъ имѣть:

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dX}{dy}y'+\frac{dY}{dx}y'^m+\frac{dY}{dy}y'^{m+1}+mYy'^{m-1}y''=\frac{dV}{dx}.$$

Сравнивая это равенство съ (1), мы видимъ, что производная $\frac{dV}{dx}$ одинаковаго вида съ функціею $F$, откуда заключаемъ, что если только $F$ можетъ быть полною производною отъ нѣкоторой функціи вида (2), то, предполагая $m$ отличнымъ отъ $+1$ и отъ $-1$, необходимо должны имѣть мѣсто слѣдующія равенства:

$$A=\frac{dX}{dx}, B=\frac{dX}{dy}, C=\frac{dY}{dx}, D=\frac{dY}{dy}, E=mY. \qquad (3)$$

Изъ этихъ равенствъ нетрудно получить всѣ условія, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты $F$.

Съ этою цѣлію дифференцируемъ 1-ое и 3-е изъ равенствъ (3) частнымъ образомъ по $y$, 2-е и 4-е по $x$ и 5-ое по $x$ и $y$; получимъ:

$$\frac{dA}{dy}=\frac{d^2X}{dxdy}, \frac{dB}{dx}=\frac{d^2X}{dydx}, \frac{dC}{dy}=\frac{d^2Y}{dxdy}, \frac{dD}{dx}=\frac{d^2Y}{dydx},$$

$$\frac{dE}{dx}=m\frac{dY}{dx}, \frac{dE}{dy}=m\frac{dY}{dy}$$

Сравнивая эти 6 равенствъ между собою и съ (3), получимъ слѣдующія 3 отношенія:

$$\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}, \frac{dE}{dx}=mC, \frac{dE}{dy}=mD. \quad (4)$$

Всѣ остальные результаты сравненія будутъ слѣдствіями этихъ 3-хъ. Итакъ, можемъ сказать, что равенства (4) представляютъ всѣ необходимыя условія для того, чтобы $F$ была полною производною отъ функціи $V$ вида (2) [$m$ отлично отъ $+1$ и отъ $-1$].

Если мы теперь допустимъ существованіе этихъ условій для $F$ и на основаніи ихъ опредѣлимъ функцію $V$, удовлетворяющую равенству: $\frac{dV}{dx}=F$, то вмѣстѣ съ тѣмъ мы докажемъ достаточность условій (4).

Функція $V$ будетъ извѣстна, если будутъ найдены $X$ и $Y$, удовлетворяющія равенствамъ (3).

Для опредѣленія $X$ замѣчаемъ, что по 1-ому изъ условій (4) $Adx+Bdy$ есть точный дифференціалъ нѣкоторой функціи $x$ и $y$ и эта функція, какъ видно изъ (3), есть именно $X$; слѣдовательно:

$$X=\int(Adx+Bdy)+\alpha.$$

Далѣе 2-ое и 3-е изъ условій (4) доставляютъ намъ:

$$\frac{dE}{dx}dx+\frac{dE}{dy}dy=dE=m(Cdx+Ddy).$$

Съ другой стороны изъ (3):

$$dY=(Cdx+Ddy).$$

Слѣдовательно: $dE=mdY$; откуда: $E=mY+\alpha_1$, но по послѣднему изъ равенствъ (3) постоянная $\alpha_1=0$.

Значитъ, имѣемъ: $Y=\frac{1}{m}E$.

Опредѣливъ такимъ образомъ $X$ и $Y$, мы получаемъ слѣдующій результатъ: если коэффиценты функціи $F$ (1) тождественно удовлетворяютъ 3-мъ условіямъ (4), то эта функція $F$ будетъ полною производною отъ:

$$V = \int (Adx + Bdy) + \frac{E}{m} y'^m + \alpha \tag{5}$$

Получивъ по этому способу весьма легко условія (4), при которыхъ функція $F$ будетъ полною производною отъ $V$, и найдя формулу (5) для опредѣленія $V$, мы постановимъ теперь тѣ же самые результаты другимъ болѣе общимъ путемъ, а именно: мы не будемъ теперь искать условій, при которыхъ $F$ будетъ полною производною отъ функціи $V$ вида (2), но постараемся найти условія, при которыхъ $F$ можетъ быть полною производною отъ какой бы то ни было функціи $U = f(x, y, y')$.

Одно необходимое и достаточное для этого условіе, доставляемое теоріею Эйлера и Кондорсе, есть слѣдующее:

$$\frac{dF}{dy} - \mathrm{d}\,\frac{\frac{dF}{dy'}}{\mathrm{d}x} + \mathrm{d}^2\,\frac{\frac{dF}{dy''}}{\mathrm{d}x^2} = 0. \tag{6}$$

при чемъ условіе это должно быть тождественно удовлетворено.

Мы покажемъ, что это условіе распадается на 3 другихъ, именно на 3 условія (4).

Съ этою цѣлію составляемъ самымъ дѣломъ производныя $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dy'}$, $\frac{dF}{dy''}$ и получаемъ:

$$\frac{dF}{dy} = \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dy} y' + \frac{dC}{dy} y'^m + \frac{dD}{dy} y'^{m+1} + \frac{dE}{dy} y'^{m-1} y''$$

$$\frac{dF}{dy'} = B + mCy'^{m-1} + (m+1)Dy'^m + (m-1)Ey'^{m-2}y''$$

$$\frac{dF}{dy''} = Ey'^{m-1}.$$

Далѣе составляя полныя производныя $\dfrac{d\frac{dF}{dy'}}{dx}$, $\dfrac{d^2\frac{dF}{dy''}}{dx^2}$, находимъ:

$$\frac{d\frac{dF}{dy'}}{dx}=\frac{dB}{dx}+\frac{dB}{dy}y'+m\frac{dC}{dx}y'^{m-1}+m\frac{dC}{dy}y'^m+(m-1)\left(mC+\frac{dE}{dx}\right)y'^{m-2}y''+$$

$$+(m+1)\frac{dD}{dx}y'^m+(m+1)\frac{dD}{dy}y'^{m+1}+\left[(m+1)mD+(m-1)\frac{dE}{dy}\right]y'^{m-1}y''+$$

$$+(m-1)(m-2)Ey'^{m-3}y''^2+(m-1)Ey'^{m-2}y'''.$$

$$\frac{d^2\frac{dF}{dy''}}{dx^2}=\frac{d^2E}{dx^2}y'^{m-1}+2\frac{d^2E}{dxdy}y'^m+2(m-1)\frac{dE}{dx}y'^{m-2}y''+(2m-1)\frac{dE}{dy}y'^{m-1}y''+$$

$$+(m-1)(m-2)Ey'^{m-3}y''^2+(m-1)Ey'^{m-2}y'''.$$

Подставляя теперь равныя вмѣсто равныхъ въ (6) и располагая результатъ по степенямъ $y'$, будемъ имѣть:

$$\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}+\left[\frac{d^2E}{dx^2}-m\frac{dC}{dx}\right]y'^{m-1}+\left[2\frac{d^2E}{dxdy}-(m-1)\frac{dC}{dy}-(m+1)\frac{dD}{dx}\right]y'^m+$$

$$+\left(\frac{d^2E}{dy^2}-m\frac{dD}{dy}\right)y'^{m+1}+(m-1)\left(\frac{dE}{dx}-mC\right)y'^{m-2}y''+ \qquad (7)$$

$$(m+1)\left(\frac{dE}{dy}-mD\right)y'^{m-1}y''=0.$$

Если $F$ полная производная отъ $f(x, y, y')$, то это послѣднее равенство должно сводиться на тождество $0=0$, для чего необходимо, чтобы коэффиціенты лѣвой части при различныхъ степеняхъ $y'$ были нули, а потому, исключая сперва случаи $m=-1$, $m=+1$, будемъ имѣть:

$$\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}=0,\ \frac{d^2E}{dx^2}-m\frac{dC}{dx}=0,\ 2\frac{d^2E}{dxdy}-(m-1)\frac{dC}{dy}-(m+1)\frac{dD}{dx}=0,$$

$$\frac{d^2E}{dy^2}-m\frac{dD}{dy}=0,\ \frac{dE}{dx}-mC=0,\frac{dE}{dy}-mD=0.$$

Здѣсь по видимому 6 условій, но не трудно убѣдиться,

что между ними существенно различныхъ только 3, а именно:

$$\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}=0,\ \frac{dE}{dx}-mC=0,\ \frac{dE}{dy}-mD=0,$$

т. е. какъ разъ 3 условія (4).

Итакъ, мы видимъ, что дѣйствительно условія (4) необходимы для того, чтобы $F$ могла быть полною производною отъ какой бы то ни было функціи $f(x, y, y')$.

Если $m=1$, то членъ съ $y'^{m-2}y''$ въ (7) исчезаетъ и кромѣ того членъ съ $y'^{m-1}$ соединяется съ первымъ членомъ, такъ что для $m=1$ условіе (7) замѣняется 4-мя равенствами

$$\frac{dA}{dy}-\frac{d(B+C)}{dx}+\frac{d^2E}{dx^2}=0,\ 2\frac{d^2E}{dydx}-2\frac{dD}{dx}=0,\ \frac{d^2E}{dy^2}-\frac{dD}{dy}=0,\ \frac{dE}{dy}-D=0$$

2-ое и 3-е изъ этихъ равенствъ суть слѣдствія 4-го и значитъ имѣемъ только 2 существенно различныхъ условія:

$$\frac{dA}{dy}-\frac{d(B+C)}{dx}+\frac{d^2E}{dx^2}=0,\ \frac{dE}{dy}-D=0. \tag{8}$$

Мы видимъ, что въ этихъ условіяхъ коэффиціенты $B$ и $C$ соединены вмѣстѣ, что и должно быть, ибо для $m=1$ функція $F$ принимаетъ видъ:

$$F=A+(B+C)y'+Dy'^2+Ey''.$$

Точно такъ же найдемъ, что для $m=-1$, причемъ:

$$F=(A+D)+By'+Cy'^{-1}+Ey'^{-2}y'',$$

равенство (3) доставитъ слѣдующія 2 условія для того, чтобы $F$ была полною производною:

$$\frac{d(A+D)}{dy}-\frac{dB}{dx}+\frac{d^2E}{dy^2}=0,\ \frac{dE}{dx}-C=0. \tag{9}$$

Слѣдовательно, въ случаяхъ $m=+1$, $m=-1$ необходимы только 2 условія для того, чтобы $F$ была полною производною.

Замѣтимъ однакоже, что если бы для $m=1$, или $m=-1$, 3 условія (4) были удовлетворены, то à fortiori оба условія (8) или (9) были бы удовлетворены и слѣд. $F$ была бы полною производною.

Это замѣчаніе для насъ очень важно, ибо случаи $m=1$. $m=-1$, доставятъ намъ наиболѣе интересные результаты.

Доказавъ общимъ путемъ необходимость условій (4) для существованія функціи $U=f(x, y, y')$, удовлетворяющей равенству $\frac{dU}{dx}=F$, допустимъ теперь, что условія эти удовлетворены и разыщемъ $U=\int Fdx$ по какому-нибудь общему способу.

Мы воспользуемся для этого способомъ, предложеннымъ Бертраномъ въ 14-омъ томѣ журнала Ліувилля.

По этому способу приводимъ $Fdx$ къ виду: $Fdx=Pdx+Qdy'$, гдѣ: $P=A+By'+Cy'^m+Dy'^{m+1}$, $Q=Ey'^{m-1}$ и интегрируемъ членъ $Qdy'$, какъ дифференціальное выраженіе съ одной перемѣнной $y'$; получаемъ:

$$U_1=\int Qdy'=\int Ey'^{m-1}dy'=\frac{E}{m}y'^m+\alpha_1.$$

Затѣмъ беремъ полный дифференціалъ отъ $U_1$ по $x$:

$$dU_1=\left(\frac{1}{m}\frac{dE}{dx}y'^m+\frac{1}{m}\frac{dE}{dy}y'^{m+1}+Ey'^{m-1}y''\right)dx$$

и вычитаемъ $dU_1$ изъ $dU=Fdx$, принимая въ расчетъ 2-ое и 3-е изъ условій (4); будемъ имѣть: $dU-dU_1=Adx+Bdy$.

Это же послѣднее выраженіе $Adx+Bdy$ на основаніи 1-го изъ условій (4) есть точный дифференціалъ и интегрируя его имѣемъ:

$$U-U_1=\int(Adx+Bdy)+\alpha_2$$

откуда посредствомъ выше найденнаго выраженія для $U_1$ находимъ:

$$U=\int F dx=\int(A dx+B dy)+\frac{E}{m}y'^m+\alpha$$

(гдѣ $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$) т. е. формулу тождественную съ (5).

Займемся теперь доказательствомъ высказанной нами теоремы (стр. 3).

Пусть въ уравненіи (A), или что то же $F=0$, функція $F$ не удовлетворяетъ условіямъ (4) и слѣд. не будетъ полною производною, то представляется вопросъ: нельзя-ли найти множитель $M$ функцію $x$ и $y$ такъ, чтобы $MF$ удовлетворяла условіямъ (4)? Эта функція $M$ и будетъ интегрирующимъ множителемъ уравненія $F=0$.

Мы имѣемъ:

$$MF=MA+MBy'+MCy'^m+MD'^{m+1}+MEy'^{m-1}y''$$

а потому, чтобы $MF$ была полною производною, функція $M$, на основаніи (4), должна удовлетворять системѣ слѣдующихъ 3-хъ уравненій:

$$\frac{d(MA)}{dy}-\frac{d(MB)}{dx}=0,\ \frac{d(ME)}{dx}-mMC=0,\ \frac{d(ME)}{dy}-mMD=0,$$

которыя мы напишемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}+A\frac{dlogM}{dy}-B\frac{dlogM}{dx}=0,\ \frac{dE}{dx}-mC+E\frac{dlogM}{dx}=0,$$
$$\frac{dE}{dy}-mD+E\frac{dlogM}{dy}=0 \qquad (10)$$

Функція $M$ должна удовлетворять совмѣстно этимъ 3-мъ уравненіямъ.

Опредѣливъ изъ 2-го и 3-го производныя $logM$ по $x$ и $y$, получимъ.

$$\frac{dlogM}{dx}=\frac{1}{E}\left(mC-\frac{dE}{dx}\right),\ \frac{dlogM}{dy}=\frac{1}{E}\left(mD-\frac{dE}{dy}\right). \qquad (11)$$

Ясно, что для существованія функціи $M$, удовлетворяющей 2-мъ уравненіямъ (11), необходимо, чтобы

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{mC}{E}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{\frac{dE}{dx}}{E}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{mD}{E}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dE}{dy}}{E}\right)$$

что сводится на $$\frac{d\left(\frac{C}{E}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{D}{E}\right)}{dx}. \qquad (12)$$

Далѣе, внося выраженія (11) въ 1-ое изъ уравненій (10) находимъ:

$$\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}+\frac{A}{E}\left(mD-\frac{dE}{dy}\right)-\frac{B}{E}\left(mC-\frac{dE}{dx}\right)=0$$

что можетъ быть написано такъ:

$$\frac{\left(E\frac{dA}{dy}-A\frac{dE}{dy}\right)}{E^2}-\frac{\left(E\frac{dB}{dx}-B\frac{dE}{dx}\right)}{E^2}+m\left(\frac{AD-BC}{E^2}\right)=0$$

или:

$$\frac{d\left(\frac{A}{E}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{B}{E}\right)}{dx}+m\frac{(AD-BC)}{E^2}=0. \qquad (13)$$

Итакъ, мы доказали, что для существованія множителя $M$ необходимы 2 условія (12) и (13).

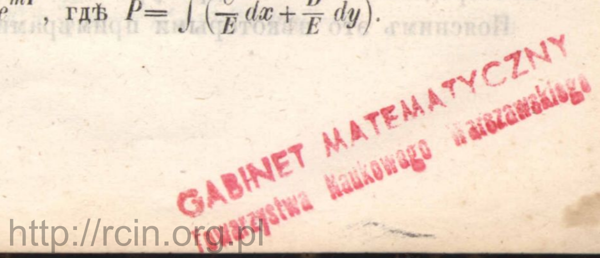
Наоборотъ, если (12) и (13) имѣютъ мѣсто, то множитель $M$ сейчасъ же можетъ быть опредѣленъ, ибо изъ (11) имѣемъ:

$$\frac{d\log(ME)}{dx}=\frac{mC}{E},\quad \frac{d\log(ME)}{dy}=\frac{mD}{E}$$

откуда на основаніи условія (12) выводимъ:

$$\log(ME)=m\int\left(\frac{C}{E}\,dx+\frac{D}{E}\,dy\right)$$ и слѣдовательно:

$$M=\frac{1}{E}\,e^{mP},\ \text{гдѣ}\ P=\int\left(\frac{C}{E}\,dx+\frac{D}{E}\,dy\right).$$



Зная такимъ образомъ интегрирующій множитель $M$, можемъ найти $\int MFdx$.

Въ самомъ дѣлѣ по формулѣ (5) имѣемъ:

$$\int MFdx = \int M(Adx + Bdy) + \frac{ME}{m} y'^m = \alpha, \text{ ибо } MF = 0.$$

Это слѣд. и будетъ первый интегралъ уравненія $F=0$, предполагая, что коэффиценты $F$ удовлетворяютъ условіямъ (12) и (13); итакъ наша основная теорема (стр. 3), доказана.

Изъ самаго доказательства этой теоремы слѣдуетъ, что уравненіе ($A$), при всякомъ $m$, отличномъ отъ $+1$ и отъ $-1$, можетъ имѣть интегрирующій множитель $M$, не зависящій отъ $y$ только при существованіи условій ($B$) и ($C$).

Интересно обратить еще вниманіе на слѣдующее обстоятельство: въ уравненіи ($A$) всегда можно разсматривать коэффиціентъ $E$ при $y'^{m-1} y''$ равнымъ единицѣ, ибо въ противномъ случаѣ достаточно было бы раздѣлить все уравненіе на $E$; между тѣмъ условія интегральности функціи:

$$F = A + By' + Cy'^m + Dy'^{m+1} + y'^{m-1} y'',$$

на основаніи (4), будутъ: $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $C=0$, $D=0$.

Изъ этого видно, что если бы мы положили à priori $E=1$ въ уравненіи ($A$), то мы не могли бы доказать нашей теоремы относительно интегрирующаго множителя этого уравненія.

2. Если будетъ дано дифференціальное уравненіе вида ($A$) (стр. 3), то говоря вообще, оно будетъ рѣдко удовлетворять условіямъ ($B$) и ($C$), предписываемымъ нашей теоремой, тѣмъ не менѣе можетъ случиться, что условія эти удовлетворяются и тогда интеграція даннаго уравненія сводится непосредственно на квадратуры.

Пояснимъ это нѣкоторыми примѣрами.

Сравнивая уравненіе:

$$\varphi(x)+\left(2-\frac{y}{x}\right)y'^2-y'^3+2(x-y)y'y''=0 \qquad (1)$$

съ $(A)$, имѣемъ:

$$m=2,\ A=\varphi(x),\ B=0,\ C=2-\frac{y}{x},\ D=-1,\ E=2(x-y).$$

Подставляя эти значенія коэффиціентовъ въ условія $(B)$ и $(C)$, находимъ:

$$\frac{1}{2}\varphi(x)\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x-y}\right)-\frac{2\varphi(x)}{4(x-y)^2}=0,\ \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\frac{2x-y}{x^2-xy}\right)=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-y}\right)=\frac{1}{2(x-y)^2},$$

т. е. оба условія тождественно удовлетворены, а потому мы увѣрены, что интеграція уравненія (1) совершится посредствомъ квадратуръ.

Интегрирующій множитель этого уравненія, по формулѣ $(D)$, (стр. 3), напишется такъ:

$$M=\frac{1}{x-y}e^{2P}$$

гдѣ:

$$P=\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x-y}{x^2-xy}dx-\frac{dy}{x-y}\right)=-\frac{1}{2}\int_0^y\frac{dy}{x-y}+\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\log[x(x-y)].$$

Слѣд. $M=x$; таковъ интегрирующій множитель уравненія (1). За тѣмъ по формулѣ $(E)$ имѣемъ первый интегралъ:

$$\int x\varphi(x)dx+x(x-y)y'^2=\alpha.$$

Для втораго примѣра возьмемъ дифференціальное уравненіе:

$$x^2+xy^2+(x^2y+\frac{x^3}{3}y^3+\frac{x^2}{2}y^5-y^3)y'+y^3y'^3+2y'y''=0 \qquad (2)$$

гдѣ:

$$m=2,\ A=x^2+xy^2,\ B=x^2y+\frac{x^3}{3}y^3+\frac{x^2}{2}y^5-y^3,\ C=0,\ D=y^3,\ E=2$$

и оба условія $(B)$ и $(C)$ удовлетворены.

Интегрирующій множитель уравненія (2) есть: $M=e^{\frac{1}{4}y^4}$, а первый интегралъ

$$\int_0^x (x^2+xy^2)e^{\frac{1}{4}y^4}dx-\int y^3e^{\frac{1}{4}y^4}dy+e^{\frac{1}{4}y^4}y'^2=\alpha,$$

или

$$e^{\frac{1}{4}y^4}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}+y'^2-1\right)=\alpha.$$

Займемся еще однимъ болѣе сложнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ, а именно:

$$\frac{y^2(x^2+1)}{3(x^2-1)}-\frac{xy(3x^2+1)}{2(x^2-1)^2}+\frac{3x^2(3x+1)}{4(x^2-1)^3}+\frac{1}{3}\,xyy'+y(x^2+1)y'^{\frac{2}{3}}+$$

$$+(x^2-1)xy'^{\frac{5}{3}}+x^2y'^{-\frac{1}{3}}y''=0 \tag{3}$$

Здѣсь:

$$m=\frac{2}{3},\ A=\frac{y^2(x^2+1)}{3(x^2-1)}-\frac{xy(3x^2+1)}{2(x^2-1)^2}+\frac{3x^2(3x^2+1)}{4(x^2-1)^3},\ B=\frac{1}{3}xy,\ C=y(x^2+1),$$

$$D=(x^2-1)x,\ E=x^2.$$

Внося эти значенія коэффиціентовъ въ условія $(B)$ и $(C)$, мы увидимъ, что оба условія удовлетворяются, а потому уравненіе (3) можетъ быть проинтегрировано посредствомъ квадратуръ.

По формулѣ $(D)$ имѣемъ слѣдующее выраженіе для интегрирующаго множителя этого уравненія

$$M=\frac{1}{x^2}\,e^{\frac{2}{3}P}\,;\ \text{гдѣ}\ P=\int\left[\frac{y(x^2+1)}{x^2}dx+\frac{x^2-1}{x}dy\right]=\frac{y(x^2-1)}{x}$$

слѣд.

$$M=\frac{1}{x^2}\,e^{\frac{2}{3}y\left(\frac{(x^2-1)}{x}\right)}$$

За тѣмъ по формулѣ $(E)$ имѣемъ первый интегралъ:

$$\int_0^y MBdy+\int (MA)_0 dx+\frac{ME}{m}y'^m=\alpha$$

гдѣ $(MA)_0$ изображаетъ результатъ подстановленія $y=0$ въ $MA$; вставляя сюда вмѣсто $M$, $A$, $B$, $E$ ихъ значені я, получимъ

$$\frac{1}{3}\int_0^y \frac{y}{x}\,e^{\frac{2}{3}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)y}dy+\frac{3}{4}\int\frac{3x^2+1}{(x^2+1)^3}dx+\frac{3}{2}\,e^{\frac{2}{3}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)y}\,y'^{\frac{2}{3}}=\alpha\ (4)$$

Оба интеграла, входящіе въ лѣвую часть этого равенства, могутъ быть представлены въ конечной формѣ.

Для разысканія 1-го, мы воспользуемся формулой:

$$\int_0^y ye^{ay}dy=\frac{1}{a}ye^{ay}-\frac{1}{a^2}e^{ay}+\frac{1}{a^2}$$

гдѣ $a$ есть какая угодно величина независящая отъ $y$.

Полагая въ этой формулѣ: $a=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$, найдемъ:

$$\frac{1}{3}\int_0^y \frac{y}{x}\,e^{\frac{2}{3}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)y}dy=e^{\frac{2}{3}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)y}\left[\frac{y}{2(x^2-1)}-\frac{3}{4}\frac{x}{(x^2-1)^2}\right]+\frac{3}{4}\frac{x}{(x^2-1)^2}$$

Что касается до 2-го интеграла, то онъ будучи интеграломъ раціональной дроби не можетъ представить никакихъ затрудненій. Разлагая $\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}$ на частныя дроби, найдемъ:

$$\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}=\frac{1}{2(x-1)^3}-\frac{1}{2(x+1)^3}$$

слѣд.

$$\int\frac{(3x^2+1)dx}{(x^2-1)^3}=\frac{1}{4(x+1)^2}-\frac{1}{4(x-1)^2}=-\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{4(x^2-1)^2}=-\frac{x}{(x^2-1)^2}$$

Если внесемъ найденныя выраженія интеграловъ въ (4), то получимъ первый интегралъ уравненія (3) въ слѣдующемъ видѣ:

$$e^{\frac{2}{3}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)y}\left[\frac{y}{2(x^2-1)}-\frac{3x}{4(x^2-1)^2}+\frac{3}{2}y'\right]^{\frac{2}{3}}=\alpha$$

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію одного общаго слѣдствія нашей теоремы.

Пусть въ уравненіи ($A$) $m=m'm''$, т. е. мы предполагаемъ показатель $m$ разбитымъ на 2 множителя $m'$ и $m''$.

При этомъ условія ($B$) и ($C$) могутъ быть написаны слѣдующимъ образомъ:

$$d\left(\frac{\frac{A}{E}}{dy}\right)-d\left(\frac{\frac{B}{E}}{dx}\right)+m'\left(\frac{A\,.\,m''D-B.m''C}{E^2}\right)=0$$

$$d\left(\frac{\frac{m''C}{E}}{dy}\right)-d\left(\frac{\frac{m''D}{E}}{dx}\right)=0.$$

Разсматривая условія, написанныя въ такомъ видѣ, мы приходимъ къ заключенію, что если уравненіе ($A$) интегри-

руется по нашей теоремѣ для какого нибудь опредѣленнаго значенія показателя $m$, то оно будетъ интегрироваться и для показателя $m'$, если измѣнить въ немъ коэффиціенты $C$ и $D$ въ $m''C$ и $m''D$.

Интегрирующій множитель уравненія:

$$A + By' + m''Cy'^{m'} + m''Dy'^{m'+1} + Ey'^{m'-1}y'' = 0 \tag{1}$$

остается тотъ же, какъ и для $(A)$, т. е. онъ будетъ:

$$M = \frac{1}{E} e^{mP}, \text{ гдѣ } P = \int\left(\frac{C}{E}dx + \frac{D}{E}dy\right) \tag{2}$$

и первый интегралъ уравненія есть:

$$\int M(Adx + Bdy) + \frac{ME}{m'}y'^{m'} = \alpha. \tag{3}$$

Напр. если уравненіе

$$A + By' + Cy'^{\frac{p}{q}} + Dy'^{\frac{p}{q}+1} + Ey'^{\frac{p}{q}-1} y'' = 0, \text{ гдѣ } m = \frac{p}{q}$$

интегрируется, то полагая $m' = p$, $m'' = \frac{1}{q}$, заключимъ по предыдущему, что и уравненіе:

$$A + By' + \frac{C}{q} y'^{p} + \frac{D}{q} y'^{p+1} + Ey'^{p-1} y'' = 0$$

тоже интегрируется.

Равнымъ образомъ полагая: $m' = \frac{q}{p}$, $m'' = \frac{p^2}{q^2}$, получимъ еще интегрируемое уравненіе:

$$A + By' + \frac{p^2}{q^2}\left(Cy'^{\frac{q}{p}} + Dy'^{\frac{q}{p}+1}\right) + Ey'^{\frac{q}{p}-1} y'' = 0.$$

Если положимъ въ уравненіи (1) $m' = -m$, то $m'' = -1$ и оно приметъ видъ:

$$A + By' - Cy'^{-m} - Dy'^{-m+1} + Ey'^{-m-1}y'' = 0. \quad (4)$$

Интегрирующій множитель этого уравненія имѣетъ выраженіе (2), а первый интегралъ по (3) будетъ:

$$\int M(Adx + Bdy) - \frac{ME}{m} y'^{-m} = \alpha. \quad (5)$$

Умноживъ обѣ части уравненія (4) на $-y'^{m+1}$ и измѣнивъ въ немъ $A$ и $B$ въ $-A$ и $-B$, получимъ:

$$Ay'^{m+1} + By'^{m+2} + Cy' + Dy'^2 - Ey'' = 0. \quad (6)$$

Интегрирующій множитель этого послѣдняго уравненія будетъ:

$$N = My'^{-(m+1)}, \text{ гдѣ } M \text{ имѣетъ прежнее значеніе (2).} \quad (7)$$

Первый интегралъ уравненія (6) получимъ изъ (5), если замѣстимъ въ немъ $A$ и $B$ черезъ $-A$ и $-B$; измѣняя при этомъ произвольную постоянную $\alpha$ въ $-\alpha$, будемъ имѣть:

$$\int M(Adx + Bdy) + \frac{ME}{m} y'^{-m} = \alpha. \quad (8)$$

Итакъ, если коэффиціенты уравненія (6) удовлетворяютъ 2-мъ условіямъ ($B$) и ($C$), то оно интегрируется; его интегрирующій множитель и первый интегралъ опредѣляются по формуламъ (7) и (8).

Возвращаемся еще къ уравненію (1) и полагаемъ въ немъ $m' = 1$; то $m'' = m$, и мы такимъ образомъ получимъ:

$$A + (B + mC)y' + mDy'^2 + Ey'' = 0. \quad (9)$$

Если въ этомъ уравненіи величины $A$, $B$, $C$, $D$ и $E$ удовлетворяютъ условіямъ $(B)$ и $(C)$, то его интегрирующій множитель будетъ опять имѣть выраженіе (2), а первый интегралъ по (3) будетъ:

$$\int M(Adx+Bdy)+MEy'=\alpha.$$

Точно также полагая въ (1) $m'=-1$, причемъ $m''=-m$, найдемъ, что если въ уравненіи:

$$(A-mD)\,y'^2+By'^3-mCy'+Ey''=0 \tag{10}$$

величины $A$, $D$, $B$, $C$, $E$, удовлетворяютъ 2-мъ условіямъ $(B)$ и $(C)$, то интегрирующій множитель и первый интегралъ уравненія (10) опредѣлятся по слѣдующимъ формуламъ:

$$N=My'^{-2},\ \text{гдѣ}\ M\ \text{имѣетъ значеніе (2)},$$

$$\int M(Adx+Bdy)-MEy'^{-1}=\alpha.$$

Обращая вниманіе на выраженія интегрирующихъ множителей и первыхъ интеграловъ уравненій (9) и (10), мы видимъ, что они содержатъ въ себѣ части $B$ и $mC$ коэффиціента $(B+mC)$ въ уравненіи (9) и части $A$ и $mD$ коэффиціента $A-mD$ въ уравненіи (10). Изъ этого слѣдуетъ, что здѣсь интеграція уравненій (9) и (10), удовлетворяющихъ условіямъ $(B)$ и $(C)$, совершается путемъ особеннымъ и существенно отличающимся отъ того, по которому интегрируются уравненія, удовлетворяющія условіямъ $(B)$ и $(C)$, при какомъ-нибудь показателѣ $m$ не равномъ $\pm 1$.

Считаемъ не лишнимъ сдѣлать еще слѣдующее замѣчаніе относительно уравненія (1): мы видѣли, что это уравненіе обладаетъ свойствомъ быть интегрируемымъ одновременно съ уравненіемъ $(A)$ и имѣть съ нимъ одинъ и тотъ же интегрирующій множитель (2); но очевидно, что если бы

условіе $(B)$ было удовлетворено независимо отъ показателя $m$, то и всѣ уравненія получаемыя изъ $(A)$ приписываніемъ $m$ какого-нибудь частнаго значенія были бы тоже интегрируемы, при чемъ для различныхъ значеній $m$ интегрирующіе множители, какъ видно изъ (2), будутъ также различны.

4. Результатъ, выведенный въ послѣднемъ параграфѣ для уравненія (6), можетъ быть также полученъ по общему началу перемѣны перемѣнной независимой въ дифференціальномъ уравненіи 2-го порядка, объясненіемъ котораго мы теперь и займемся.

Пусть дано уравненіе:

$$F(x, y, y', y'')=0, \tag{1}$$

интегрирующій множитель этого уравненія пусть будетъ:

$$M=\varphi(x, y, y'), \tag{2}$$

а первый интегралъ:

$$f(x, y, y')=\alpha, \tag{3}$$

такъ, что:

$$\varphi F=\frac{df}{dx}. \tag{4}$$

Возьмемъ въ данномъ дифференціальномъ уравненіи (1) $y$ за перемѣнную независимую и будемъ разсматривать $x$, какъ искомую функцію $y$-ка, т. е. мы, такъ сказать, заставляемъ $x$ и $y$ перемѣнить ихъ роли въ уравненіи (1).

Означимъ черезъ $x'$, $x''$ производныя $x$ по $y$, то:

$$y'=x'^{-1}, \tag{5}$$

а $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$, но $\frac{dy'}{dy}=-x'^{-2}x''$, $\frac{dy}{dx}=x'^{-1}$ и слѣдовательно:

$$y''=-x'^{-3}x''. \tag{6}$$

Если замѣстимъ въ (1) производныя $y$ по $x$ ихъ выраженіями въ производныхъ $x$ по $y$, то оно приметъ видъ:

$$F(x, y, x'^{-1}, -x'^{-3}x'') = 0,$$

что мы, для краткости, изобразимъ черезъ:

$$F_y = 0, \tag{7}$$

гдѣ $F_y$ означаетъ результатъ подстановленія въ $F$ вмѣсто $y'$ и $y''$ ихъ выраженій (5) и (6) и слѣд. уравненіе (7) есть то, во что переходитъ уравненіе (1), когда въ немъ $y$ будетъ принято за перемѣнную независимую.

Замѣщая въ (3) $y'$ его выраженіемъ изъ (5) будемъ имѣть:

$$f(x, y, x'^{-1}) = f_y = \alpha.$$

Это есть отношеніе между $y$, $x$, $x'$ и $\alpha$, одновременно существующее съ (7), и слѣд. первый интегралъ этого уравненія.

Покажемъ теперь какимъ образомъ изъ интегрирующаго множителя $M$ уравненія (1) получается интегрирующій множитель $N$ уравненія (7), т. е. функція $y$, $x$ и $x'$, удовлетворяющая равенству:

$$NF_y = \frac{\mathrm{d}f_y}{\mathrm{d}y}. \tag{8}$$

Съ этою цѣлію замѣщаемъ въ обѣихъ частяхъ (4) $y'$ и $y''$ ихъ выраженіями изъ (5) и (6) и результатъ этого замѣщенія пишемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\varphi_y F_y = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_y. \tag{9}$$

Здѣсь:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dy'}y'',$$

и слѣдовательно:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_y = \left(\frac{df}{dx}\right)_y + \left(\frac{df}{dx}\right)_y x'^{-1} - \left(\frac{df}{dy'}\right)_y x'^{-3}x''. \tag{10}$$

Съ другой стороны, развертывая первую часть равенства (8), получимъ:

$$\frac{df_y}{dy} = \frac{df_y}{dy} + \frac{df_y}{dx} x' + \frac{df_y}{dx'} x'',$$

гдѣ $\frac{df_y}{dx'}$ есть частная производная по $x'$ отъ результата подстановленія $x'^{-1}$ вмѣсто $y'$ въ $f$, и какъ $x'$ входитъ въ $f_y$ только посредствомъ $y'=x'^{-1}$, то:

$$\frac{df_y}{dx'} = \left(\frac{df}{dy'}\right)_y \frac{d(x'^{-1})}{dx'} = -x'^{-2}\left(\frac{df}{dy'}\right)_y.$$

Кромѣ того нетрудно понять, что:

$$\frac{df_y}{dy} = \left(\frac{df}{dy}\right)_y \text{ и } \frac{df_y}{dx} = \left(\frac{df}{dx}\right)_y$$

ибо результатъ подстановленія $y'=x'^{-1}$ въ частныя производныя $f$ по $y$ или $x$ остается одинъ и тотъ же, будетъ ли это подстановленіе сдѣлано до дифференцированія или послѣ.

Въ силу всѣхъ этихъ замѣчаній можемъ написать:

$$\frac{df_y}{dy} = \left(\frac{df}{dy}\right)_y + \left(\frac{df}{dx}\right)_y x' - \left(\frac{df}{dy'}\right)_y x'^{-2}x''.$$

Сравнивая это равенство съ (10), мы приходимъ къ слѣдующему тождеству:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_y = x'^{-1}\frac{df_y}{dy}. \tag{11}$$

Повѣримъ это тождество на частномъ примѣрѣ, пусть:

$$f(x, y, y') = xyy',$$

то:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = yy' + xy'^2 + xyy''$$

и слѣд.

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_y = yx'^{-1} + xx'^{-2} - xyx'^{-3}x''.$$

Съ другой стороны:

$$f_y = xyx'^{-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}f_y}{\mathrm{d}y} = xx'^{-1} + y - xyx'^{-3}x''$$

и:

$$x'^{-1}\frac{\mathrm{d}f_y}{\mathrm{d}y} = xx'^{-2} + yx'^{-1} - xyx'^{-2}x'',$$

т. е. мы дѣйствительно видимъ тождественность выраженій:

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_y \text{ и } x'^{-1}\frac{\mathrm{d}f_y}{\mathrm{d}y}.$$

На основаніи тождества (11) равенства (8) и (9) доставляютъ намъ:

$$\varphi_y F_y = x'^{-1} N F_y$$

откуда:

$$N = x'\varphi_y = x' M_y. \qquad (12)$$

Таково выраженіе интегрирующаго множителя уравненія (7).

Изъ всего сказаннаго мы видимъ, что перемѣна перемѣнной независимой ($x$ въ $y$) есть весьма удобное средство для полученія интегрирующаго множителя и перваго интеграла уравненія $F_y = 0$, если они будутъ извѣстны для уравненія $F = 0$, при чемъ, говоря вообще, уравненіе $F_y = 0$ будетъ другаго вида, нежели данное уравненіе $F = 0$.

Подобныя же соображенія могутъ быть примѣнены и къ дифференціальнымъ уравненіямъ высшихъ порядковъ, но что касается дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка, то въ нихъ перемѣна перемѣнной независимой $x$ въ $y$ ничего новаго не можемъ доставить, ибо всѣ такія уравненія приводятся къ виду:

$$Pdx + Qdy = 0, \quad (P \text{ и } Q \text{ функціи } x \text{ и } y),$$

изъ котораго слѣдуетъ, что можно принять за перемѣнную независимую какую угодно изъ 2-хъ перемѣнныхъ $x$ или $y$ и при этомъ данное уравненіе сохраняетъ одинъ и тотъ же видъ.

Если въ нашемъ общемъ уравненіи ($A$), т. е. въ уравненіи:

$$F = A + By' + Cy'^m + Dy'^{m+1} + Ey'^{m-1}y'' = 0,$$

примемъ $y$ за перемѣнную независимую, то получимъ:

$$F_y = A + Bx'^{-1} + Cx'^{-m} + Dx'^{-m-1} - Ex'^{-m-2}x'' = 0. \qquad (13)$$

Интегрирующій множитель $M$ уравненія ($A$), удовлетворяющаго условіямъ ($B$) и ($C$), какъ видно изъ формулы ($D$), не зависитъ отъ $y'$.

Значитъ $M_y = M$ и по формулѣ (12) интегрирующій множитель уравненія (13) есть $N_1 = x'M$.

Умноживъ обѣ части (13) на $x'^{m+2}$, получимъ уравненіе:

$$Ax'^{m+2} + Bx'^{m+1} + Cx'^2 + Dx' - Ex'' = 0, \qquad (14)$$

интегрирующій множитель котораго будетъ:

$$N = N_1 x'^{-(m+2)} = Mx'^{-(m+1)}. \qquad (15)$$

Первый интегралъ уравненія (14) получится изъ фор-

мулы ($E$), (стр 3) черезъ замѣщеніе $y'$ на $x'^{-1}$ и слѣд. онъ будетъ:

$$\int M(Adx + Bdy) + \frac{ME}{m} x'^{-m} = \alpha. \qquad (16)$$

Такимъ образомъ интегрирующій множитель и первый интегралъ уравненія (14), удовлетворяющаго условіямъ ($B$) и ($C$), опредѣляются по формуламъ (15) и (16).

Не трудно видѣть, что этотъ результатъ отличается отъ того, который былъ выведенъ въ § 3, (стр. 18), для уравненія 6, (§ 3), только тѣмъ, что здѣсь принята буква $x$ для означенія главной перемѣнной, $y$— для перемѣнной независимой и переставлены буквы $A$ и $B$, $C$ и $D$.

5. Изслѣдуемъ теперь различные случаи, въ которыхъ условія ($B$) и ($C$) могутъ быть удовлетворены.

Прежде всего замѣчаемъ, что если $A=0$, $B=0$, то условіе ($B$) сводится на тождество $0=0$. Уравненіе ($A$) принимаетъ въ этомъ случаѣ видъ:

$$Cy'^m + Dy'^{m+1} + Ey'^{m-1}y'' = 0,$$

и если положить въ этомъ послѣднемъ уравненіи $m=1$, оно не будетъ менѣе общее, ибо это все равно, что сократить его на $y'^{m-1}$.

Итакъ имѣемъ уравненіе:

$$Cy' + Dy'^2 + Ey'' = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее условію ($B$), а потому, если: $\frac{d}{dy}\left(\frac{C}{E}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{D}{E}\right)$,

то уравненіе (1) интегрируется; его интегрирующій множитель по формулѣ ($D$) есть:

$$M = \frac{1}{E} e^{\int\left(\frac{C}{E}dx + \frac{D}{E}dy\right)}$$

и первый интегралъ:

$$y' e^{\int\left(\frac{C}{E}dx+\frac{D}{E}dy\right)}=\alpha \text{ (по формулѣ } (E)). \quad (2)$$

Если:

$\frac{C}{E}=f(x)$, $\frac{D}{E}=F(y)$, то получается уравненіе:

$$f(x)y'+F(y)y'^2+y''=0 \quad (3$$

его интегрирующій множитель будетъ:

$$M=e^{\int f(x)\,dx+\int F(y)\,dy} \quad (4)$$

а первый интегралъ по (2) есть:

$$y'=\alpha e^{-\int f(x)dx-\int F(y)dy} \quad (5)$$

Уравненіе (3) было проинтегрировано Ліувиллемъ по способу измѣненія произвольной постоянной (*).

Послѣ того Остроградскій, въ одномъ изъ своихъ писемъ къ московскому профессору Брашману (**), замѣтилъ, что уравненіе Ліувилля, будучи раздѣлено на $y'$, тотчасъ дѣлается интегрируемымъ.

Теперь же видно, что это уравненіе есть частный случай уравненія (1), удовлетворяющаго условію ($B$), и интегрируемость котораго есть непосредственное слѣдствіе нашей теоремы.

Если въ (3) $f(x)=0$, то оно переходитъ въ уравненіе:

$$F(y)y'^2+y''=0, \quad (6)$$

---

(*) Journal de Mathématiques, 1-ére série, t. VII p. 134.

(**) I-ой томъ Московскаго Математическаго Сборника.

интегрирующій множитель и первый интегралъ котораго будутъ:

$$M = e^{\int F(y)dy}, \quad y' = \alpha\, e^{-\int F(y)dy}$$

6. Уравненіе (6) послѣдняго параграфа получается изъ болѣе общаго уравненія:

$$F(y)y'^n + y'' = 0 \qquad (1)$$

для значенія показателя $n=2$.

Сравнивая (1) съ уравненіемъ (6) § 3, мы замѣчаемъ, что это сравненіе можетъ быть сдѣлано 2-мя способами, а именно:

$$1^0 \; n=m+1,\; A=F(y),\; B=C=D=0,\; E=-1$$

$$2^0 \; n=m+2,\; A=C=D=0,\; B=F(y),\; E=-1.$$

Первый способъ сравненія не даетъ ничего полезнаго, ибо посредствомъ его мы не удовлетворимъ условію ($B$); напротивъ 2-й способъ позволяетъ удовлетворить обоимъ условіямъ ($B$) и ($C$).

Слѣд. уравненіе (1) интегрируется по формуламъ (7) и (8) § 3, но исключая случай $n=2$, который былъ разсмотрѣнъ въ послѣднемъ параграфѣ, ибо $m$ отлично отъ нуля и изъ $n=m+2$ видно, что здѣсь $n$ отлично отъ 2.

Итакъ интегрирующій множитель уравненія (1) есть:

$$N = y'^{-(n-1)}$$

а первый интегралъ будетъ:

$$\int F(y)\,dy - \frac{y'^{-(n-2)}}{n-2} = \alpha.$$

Отсюда выводимъ:

$y'^{-(n-2)} = (n-2)\int F(y)dy + \alpha$ (гдѣ $\alpha$ написано вм. $-(n-2)\alpha$)

Далѣе:

$$y'^{-1}=\omega^k\Big[(n-2)\int F(y)dy+\alpha\Big]^{\frac{1}{n-2}}$$

гдѣ ω означаетъ какой нибудь корень двучленнаго уравненія $\omega^{n-2}-1=0$, отличный отъ 1, и слѣд. $\omega^k$ какой нибудь другой корень того же уравненія.

Если въ послѣднемъ уравненіи раздѣлимъ перемѣнныя и проинтегрируемъ потомъ въ обѣихъ частяхъ, то получимъ:

$$x-\omega^k\int\Big[(n-2)\int F(y)dy+\alpha\Big]^{\frac{1}{n-2}}dy=\alpha_1$$

Сообщая здѣсь показателю $k$ различныя значенія отъ 0 до $n-3$ и перемножая всѣ полученныя такимъ образомъ равенства, мы будемъ имѣть полный интегралъ уравненія (1) въ слѣдующей формѣ:

$$\prod_{k=0}^{k=n-3}\left\{x-\omega^k\int\Big[(n-2)\int F(y)dy+\alpha\Big]^{\frac{1}{n-2}}dy\right\}=\alpha_1$$

Ясно, что уравненіе: $F(y)+y''=0$ есть частный случай уравненія (1). Его интегрирующій множитель будетъ: $N=y'$.

7. Если $A=B$ и $C=D$, то наши условія ($B$) и ($C$) перейдутъ въ:

$$\frac{d\left(\frac{A}{E}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{A}{E}\right)}{dx}=0,\qquad \frac{d\left(\frac{C}{E}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{C}{E}\right)}{dx}=0.$$

Эти уравненія въ частныхъ производныхъ, будучи проинтегрированы, доставляютъ

$$\frac{A}{E}=f(x+y),\ \frac{C}{E}=\varphi(x+y)$$

гдѣ $f$ и $\varphi$ какія угодно функціи.

Подставляя эти значенія $A=B$ и $C=D$ въ уравненіе $(A)$ получимъ:

$$f(x+y)(1+y')+\varphi(x+y)(y'^m+y'^{m+1})+y'^{m-1}y''=0. \tag{1}$$

Интегрирующій множитель этого уравненія будетъ:

$$M=e^{m\int\varphi(x+y)d(x+y)}$$

а первый интегралъ:

$$\int f(x+y)e^{m\int\varphi(x+y)d(x+y)}d(x+y)+e^{m\int\varphi(x+y)d(x+y)}\frac{y'^m}{m}=\alpha.$$

Положимъ: $x+y=z$, то: $1+y'=z'$, $y'=z'-1$, $y''=z''$, и уравненіе (1) напишемъ такъ:

$$f(z)z'+\varphi(z)z'(z'-1)^m+(z'-1)^{m-1}z''=0. \tag{2}$$

интегрирующій множитель:

$$M=e^{m\int\varphi(z)dz}$$

первый интегралъ:

$$\int e^{m\int\varphi(z)dz}f(z)dz+e^{m\int\varphi(z)dz}\frac{(z'-1)^m}{m}=\alpha. \tag{3}$$

Этотъ интегралъ уравненія (2) можетъ быть также полученъ съ помощью Бернулліева уравненія. Для этого стоитъ только положить: $(z'-1)^m=z_1$, тогда: $(z'-1)^{m-1}z''=\frac{z_1}{m}$; сдѣлавъ эти замѣщенія во (2) и умноживъ потомъ все уравненіе на $mdx$, мы получимъ дифференціальное уравненіе 1-го порядка.

$$m[f(z)+\varphi(z)z_1]dz+dz_1=0 \tag{4}$$

имѣющее видъ уравненія Бернулли, въ которомъ главная перемѣнная $z_1$, и слѣд. интегрирующій множитель этого уравненія будетъ $e^{m\int\varphi(z)dz}$; замѣстивъ въ интегралѣ уравненія (4) $z_1$ черезъ $(z'-1)^m$, мы получимъ отношеніе (3) для перваго интеграла уравненія (2).

Но уравненіе (2), къ которому мы были приведены изслѣдованіемъ условій $(B)$ и $(C)$, въ случаѣ $A=B$, $C=D$ доставитъ намъ интересные результаты для $m=+1$ и $m=-1$.

Для $m=1$ уравненіе (2) перейдетъ въ:

$$f(z)z'+\varphi(z)z'(z'-1)+z''=0,$$

или:

$$\varphi(z)z'\left[z'-1+\frac{f(z)}{\varphi(z)}\right]+z''=0$$

Означимъ:

$$1-\frac{f(z)}{\varphi(z)}=\psi(z),\quad \text{то:}\quad f(z)=-\varphi(z)[\psi(z)-1]$$

и тогда наше уравненіе напишется слѣдующимъ образомъ:

$$\varphi(z)z'[z'-\psi(z)]+z''=0. \tag{5}$$

Его интегрирующій множитель есть:

$$M=e^{\int\varphi(z)dz}$$

а первый интегралъ по (3):

$$-\int e^{\int\varphi(z)dz}\varphi(z)[\psi(z)-1]dz+e^{\int\varphi(z)dz}(z'-1)=\alpha,$$

или (замѣчая что:

$$\int e^{\int\varphi(z)dz}\varphi(z)dz=e^{\int\varphi(z)dz}\Big),\quad \int e^{\int\varphi(z)dz}\varphi(z)\psi(z)dz-z'e^{\int\varphi(z)dz}=\alpha.$$

Для $m=-1$ уравненіе (2) будетъ:

$$f(z)z'+\varphi(z)z'(z'-1)^{-1}+(z'-1)^{-2}z''=0;$$

умножая это уравненіе на $(z'-1)^2$, получимъ:

$$f(z)z'(z'-1)^2+\varphi(z)z'(z'-1)+z''=0.$$

Интегрирующій множитель послѣдняго уравненія есть:

$$N=e^{-\int\varphi(z)dz}(z'-1)^{-2}.$$

Предъидущее уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$f(z)z'(z'-1)\left[z'-1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]+z''=0.$$

Назовемъ:

$$1-\frac{\varphi(z)}{f(z)}=\psi(z),\quad \text{то: } -\varphi(z)=f(z)[\psi(z)-1]$$

и наше уравненіе приметъ видъ:

$$f(z)z'(z'-1)[z'-\psi(z)]+z''=0. \tag{6}$$

Интегрирующій множитель этого уравненія есть:

$$N=e^{\int f(z)[\psi(z)-1]dz}(z'-1)^{-2}, \tag{7}$$

а первый интегралъ по (3) будетъ:

$$\int e^{\int f(z)[\psi(z)-1]dz}f(z)dz-e^{\int f(z)[\psi(z)-1]dz}(z'-1)^{-1}=\alpha. \tag{8}$$

Разсматривая форму уравненій (5) и (6), мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: еслибы дано было для интегрированія уравненіе вида:

$$F(z,z')+z''=0$$

гдѣ $F$ цѣлая функція 2-й или 3-й степени въ $z'$ съ коэффиціентами зависящими отъ $z$, то мы весьма легко узнали бы подходитъ ли это уравненіе подъ указанныя случаи интегрируемости (5) или (6).

Для этого стоило бы только убѣдиться въ 1-омъ случаѣ ($F$ 2-й степени въ $z'$) имѣетъ ли $F$ корень $z'=0$, а во 2-мъ случаѣ ($F$ 3-й степени въ $z'$)—имѣетъ ли $F$ корни $z'=0$ и $z'=1$.

Напр. пусть дано уравненіе:

$$n[z^2z'^3-(2z^2+1)z'^2+(z^2+1)z']+zz''=0, \tag{9}$$

гдѣ $n$ величина постоянная.

Прежде всего дѣлимъ обѣ части уравненія на $z$, чтобы сдѣлать коэффиціентъ при $z''$ равнымъ единицѣ, и получаемъ:

$$n[zz'^3-(2z+z^{-1})z'^2+(z+z^{-1})z']+z''=0. \tag{10}$$

Здѣсь:

$$n[zz'^3-(2z+z^{-1})z'^2+(z+z^{-1})z']=F(z,z')$$

Эта функція $F$ имѣетъ оба корня $z'=0$, $z'=1$ и слѣд. данное уравненіе интегрируется.

Дѣлимъ теперь $F(z,z')$ на $z'(z'-1)$ и находимъ въ частномъ:

$$\frac{F(z,z')}{z'(z'-1)}=n(zz'-z-z^{-1}).$$

Приравниваемъ это частное нулю: $zz'-z-z^{-1}=0$ и выводимъ отсюда значеніе $z'=\frac{z+z^{-1}}{z}=\frac{z^2+1}{z^2}$, вслѣдствіе чего:

$$F(z,z')=nzz'(z'-1)\left(z'-\frac{z^2+1}{z^2}\right)$$

а потому въ настоящемъ случаѣ:

$$f(z)=nz,\ \psi(z)=\frac{z^2+1}{z^2}.$$

Затѣмъ составляемъ интегрирующій множитель уравненія (10) по формулѣ (7):

$$\psi(z)-1=\frac{1}{z^2},\ f(z)[\psi(z)-1]=\frac{n}{z},\ e^{\int f(z)[\psi(z)-1]dz}=z^n$$

т. е. интегрирующій множитель (10) есть $z^n(z'-1)^{-2}$ и слѣд. для уравненія (9) онъ будетъ:

$$N=z^{n-1}(z'-1)^{-2}.$$

Первый интегралъ уравненія (9) по формулѣ (6) будетъ:

$$n\int z^{n+1}dz-z^n(z'-1)^{-1}=\alpha,\ \text{или:}\ nz^2-(n+2)(z'-1)^{-1}=\alpha z^{-n}.$$

8. Условіямъ ($B$) и ($C$) можно удовлетворить еще слѣдующимъ образомъ:

Допустимъ одновременное существованіе 4-хъ равенствъ:

$$A=\rho C,\quad B=\rho D,\quad \frac{d\left(\frac{A}{E}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{B}{E}\right)}{dx},\quad \frac{d\left(\frac{C}{E}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{D}{E}\right)}{dx} \tag{1}$$

гдѣ $\rho$ есть нѣкоторая функція $x$ и $y$, то оба условія ($B$) и ($C$) будутъ удовлетворены и видъ функціи $\rho$ опредѣлить не трудно.

Для этого подставляемъ въ 3-е изъ равенствъ (1) вмѣсто $A$ и $B$ ихъ выраженія изъ первыхъ 2-хъ равенствъ и получаемъ:

$$\rho\left[\frac{d\left(\frac{C}{E}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{D}{E}\right)}{dx}\right]+\frac{C}{E}\frac{d\rho}{dy}-\frac{D}{E}\frac{d\rho}{dx}=0$$

что въ силу послѣдняго изъ равенствъ (1) сводится на:

$$\frac{C}{E}\frac{d\rho}{dy}-\frac{D}{E}\frac{d\rho}{dx}=0$$

Это уравненіе и служитъ для опредѣленія $\rho$; оно, какъ видимъ, есть линейное уравненіе въ частныхъ производныхъ

1-го порядка; слѣдовательно для рѣшенія его нужно интегрировать слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка:

$$\frac{dx}{\left(-\frac{D}{E}\right)}=\frac{dy}{\left(\frac{C}{E}\right)}=\frac{d\rho}{0}$$

гдѣ $\frac{C}{E}$ и $\frac{D}{E}$ связаны условіемъ: $\frac{d}{dy}\left(\frac{C}{E}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{D}{E}\right)$.

Интегрируя уравненіе:

$$\frac{dx}{-\frac{D}{E}}=\frac{dy}{\left(\frac{C}{E}\right)}, \text{ или: } \frac{C}{E}dx+\frac{D}{E}dy=0,$$

лѣвая часть котораго въ силу предъидущаго условія есть точный дифференціалъ, находимъ:

$$\int\left(\frac{C}{E}dx+\frac{D}{E}dy\right)=\alpha.$$

Затѣмъ изъ $d\rho=0$ имѣемъ $\rho=\beta$.

Здѣсь одна изъ постоянныхъ есть произвольная функція другой; пусть: $\beta=F(\alpha)$, то

$$\rho=F\left[\int\left(\frac{C}{E}dx+\frac{D}{E}dy\right)\right].$$

Таковъ видъ функціи $\rho$.

Если теперь подставимъ въ наше общее уравненіе (*A*) вмѣсто коэффиціентовъ *A*, *B* ихъ значенія изъ (1), то оно приметъ видъ:

$$(C+Dy')\left\{F\left(\int\left[\frac{C}{E}dx+\frac{D}{E}dy\right]\right)+y'^m\right\}+Ey'^{m-1}y''=0, \text{ гдѣ } \frac{d}{dy}\left(\frac{C}{E}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{D}{E}\right)$$

Интегрирующій множитель этого уравненія есть:

$$M=\frac{1}{E}e^{m\int\left(\frac{C}{E}dx+\frac{D}{E}dy\right)}$$

а первый интегралъ:

$$\int MF\left[\int\left(\frac{C}{E}dx+\frac{D}{E}dy\right)\right](Cdx+Ddy)+\frac{ME}{m}y'^m=\alpha$$

Если $\frac{C}{E}=\varphi(x), \frac{D}{E}=\psi(y)$, то мы получаемъ, какъ частный случай, слѣдующій результатъ.

Уравненіе

$$\left[\varphi(x)+\psi(y)y'\right]\left\{F\left[\int\varphi(x)\,dx+\int\psi(y)dy\right]+y'^m\right\}+y'^{m-1}y''=0 \qquad (2)$$

интегрируется; его интегрирующій множитель есть:

$$M=e^{m\left[\int\varphi(x)dx+\int\psi(y)dy\right]} \qquad (3)$$

а первый интегралъ:

$$\int MF\left(\int\varphi(x)dx+\int\psi(y)dy\right)\left[\varphi(x)dx+\psi(y)dy\right]+\frac{M}{m}y'^m=\alpha$$

Пусть напр.

$$\varphi(x)=\frac{1}{x},\quad \psi(y)=\frac{2}{y},\text{ то }\int\varphi(x)dx+\int\psi(y)dy=log(xy^2).$$

Возьмемъ

$$F[log(xy^2)]=e^{log(xy^2)}=xy^2;$$

будемъ имѣть уравненіе

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}y'\right)\left(xy^2+y'^m\right)+y'^{m-1}y''=0,$$

которое по предъидущему должно интегрироваться.

Интегрирующій множитель этого уравненія по (3) будетъ:

$$M=e^{m\left[\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dy}{y}\right]}=(xy^2)^m$$

Первый интегралъ по (4) есть:

$$\int (xy^2)^{m+1}\left(\frac{dx}{x}+2\,\frac{dy}{y}\right)+\left(\frac{xy^2}{m}\right)^m y'^m=\alpha$$

или:

$$(xy^2)^m[mxy^2+(m+1)y'^m]=\alpha.$$

Положимъ теперь во (2) показатель $m=1$ и назовемъ для краткости

$$\int\varphi(x)dx+\int\psi(y)dy=X.$$

Будемъ имѣть слѣдующій результатъ: уравненіе

$$\varphi(x)F(X)+[\psi(y)F(X)+m\varphi(x)]y'+m\psi(y)y'^2+y''=0. \tag{5}$$

интегрируется; его интегрирующій множитель есть:

$$M=e^{mX} \qquad \text{(см. § 3)} \tag{6}$$

и первый интегралъ:

$$\int e^{mX}F(X)dX+e^{mX}y'=\alpha. \tag{7}$$

Равнымъ образомъ, полагая въ (2) $m=-1$ и умноживъ коэффиціенты при $y'^m$ и $y'^{m+1}$ на $-m$, будемъ имѣть уравненіе

$$\left\{\varphi(x)F(X)-m\psi(y)\right\}y'^2+\psi(y)F(X)y'^3-m\varphi(x)y'+y''=0. \tag{8}$$

Интегрирующій множитель его будетъ:

$$N=e^{mX}y'^{-2}. \tag{9}$$

и первый интегралъ:

$$\int e^{mX}F(X)dX-e^{mX}y'^{-1}=\alpha. \tag{10}$$

Выведемъ нѣкоторыя слѣдствія изъ послѣднихъ 2-хъ результатовъ.

Положимъ

$$\psi(y)=1, \qquad X=y+\int\varphi(x)dx=z$$

и введемъ въ (5) перемѣнную $z$ вмѣсто $y$.

Мы имѣемъ:

$$y=z-\int\varphi(x)dx, \text{ слѣд. } y'=z'-\varphi(x),\ y''=z''-\varphi'(x);$$

вноcя равныя вмѣсто равныхъ въ (5), получаемъ уравненіе:

$$\varphi(x)F(z)+[z'-\varphi(x)]\,[F(z)+m\varphi(x)]+m[z'-\varphi(x)]^2+z''-\varphi'(x)=0.$$

Раскрывая здѣсь скобки и дѣлая потомъ приведеніе, найдемъ:

$$mz'^2+[F(z)-m\varphi(x)]z'+z''-\varphi'(x)=0.$$

Назовемъ:

$$-m\varphi(x)=\theta(x), \text{ то } -\varphi(x)=\frac{1}{m}\theta'(x)$$

и уравненіе приметъ видъ:

$$mz'^2+[F(z)+\theta(x)]z'+\frac{1}{m}\theta'(x)+z''=0 \tag{11}$$

его интегрирующій множитель по (6) есть

$$M=e^{mz} \tag{12}$$

и первый интегралъ получится изъ (7) замѣщеніемъ $X$ на $z$ и $y'$ на $z'-\varphi(x)=z'+\frac{1}{m}\theta(x)$, слѣд. этотъ интегралъ будетъ:

$$\int e^{mz}F(z)dz+e^{mz}\left[z'+\frac{1}{m}\theta(x)\right]=\alpha \tag{13}$$

При тѣхъ же предположеніяхъ: $\psi(y)=1$. $X=y+\int\varphi(x)dx=z$

уравненіе (3) переходитъ въ

$$[\varphi(x)F(z)-m][z'-\varphi(x)]^2+F(z)[z'-\varphi(x)]^3-m\varphi(x)[z'-\varphi(x)]+z''-\varphi'(x)=0.$$

Если раскроемъ здѣсь скобки, сдѣлаемъ приведеніе и расположимъ лѣвую часть по степенямъ $z$, то получимъ слѣдующее уравненіе:

$$F(z)z'^3-[2\varphi(x)F(z)+m]z'^2+\varphi(x)[F(z)\varphi(x)+m]z'+z''-\varphi'(x)=0.$$

Мы представимъ это уравненіе въ другомъ видѣ; съ этою цѣлью рѣшаемъ квадратное уравненіе:

$$F(z)z'^2-[2\varphi(x)F(z)+m]z'+\varphi(x)[F(z)\varphi(x)+m]=0$$

относительно $z'$, находимъ:

$$z'=\frac{2\varphi(x)F(z)+m\pm\sqrt{[2\varphi(x)F(z)+m]^2-4[\varphi^2(x)F^2(z)+m\varphi(x)F(z)]}}{2F(z)}$$

или:

$$z'=\frac{2\varphi(x)F(z)+m\pm m}{2F(z)},$$

т. е. имѣемъ 2 корня:

$$z'=\varphi(x),\ z'=\varphi(x)+\frac{m}{F(z)}$$

Это позволяетъ намъ написать предъидущее уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$F(z)z'[z'-\varphi(x)]\left[z'-\varphi(x)-\frac{m}{F(z)}\right]+z''-\varphi'(x)=0 \tag{14}$$

Интегрирующій множитель этого уравненія имѣетъ довольно простую форму, а именно (по формулѣ 9)

$$N=e^{mz}[z'-\varphi(x)]^{-2} \tag{15}$$

Первый интегралъ уравненія (14) по (10) будетъ:

$$\int e^{mz}F(z)dz-e^{mz}[z'-\varphi(x)]^{-1}=\alpha \tag{16}$$

Если бы въ (14) $\varphi(x)=1$, то уравненіе приняло бы видъ:

$$F(z)z'(z'-1)\left[z'-1-\frac{m}{F(z)}\right]+z''=0 \qquad (17)$$

который заключается въ уравненіи (6) § 7; стоитъ только положить въ этомъ послѣднемъ уравненіи $f(z)=F(z)$, $\psi(z)=1+\frac{m}{F(z)}$, то $f(z)[\psi(z)-1]=m$ и по формулѣ (7) § 7 интегрирующій множитель уравненія (17) будетъ:

$$N=e^{mz}(z'-1)^{-2}$$

что совершенно согласно съ формулой (15).

Пусть теперь въ (14) $F(z)$ и $\varphi(x)$ сводятся на величины постоянныя:

$$F(z)=\mu, \quad \varphi(x)=a$$

будемъ имѣть уравненіе:

$$\mu z'(z'-a)\left(z'-a-\frac{m}{\mu}\right)+z''=0$$

Назовемъ $a+\frac{m}{\mu}=b$, то $m=\mu(b-a)$ и такимъ образомъ для интегрирующаго множителя уравненія

$$\mu z'(z'-a)(z'-b)+z''=0 \qquad (18)$$

находимъ слѣдующее выраженіе:

$$N=e^{\mu(b-a)z}(z'-a)^{-2} \qquad (\text{по § 15}) \qquad (19)$$

Первый интегралъ уравненія (18) по формулѣ (16) будетъ:

$$\mu\int e^{\mu(b-a)z}dz-e^{\mu(b-a)z}(z'-a)^{-1}=\alpha \qquad (20)$$

или совершая интеграцію самымъ дѣломъ:

$$\frac{e^{\mu(b-a)z}}{b-a}-\frac{e^{\mu(b-a)z}}{z'-a}=\alpha$$

Допуская, что $a$ и $b$ различны между собой, можемъ написать послѣднее равенство слѣдующимъ образомъ:

$$e^{\mu(b-a)z}(z'-b)=\alpha(z'-a) \tag{21}$$

Таковъ первый интегралъ уравненія (18).

Извѣстно, что полная интеграція всякаго уравненія, вида

$$f(z',z'')=0 \tag{22}$$

совершается посредствомъ квадратуръ

Для этого полагаемъ $z'=u$; уравненіе перейдетъ въ:

$$f\left(u,\frac{du}{dx}\right)=0$$

Разрѣшая это послѣднее уравненіе относительно $\frac{du}{dx}$ будемъ имѣть:

$$\frac{du}{dx}=\varphi(u) \text{ и слѣд. } x=\int\frac{du}{\varphi(u)}+\alpha$$

Подставивъ сюда вмѣсто $u$ ея значеніе $z'$, получимъ отношеніе между $x$, $z'$ и $\alpha$ которое и будетъ первымъ интеграломъ даннаго уравненія (22). Но найденный нами первый интегралъ (21) уравненія (18) представляетъ отношеніе между $z$, $z'$ и $\alpha$, а не между $x$, $z'$ и $\alpha$; это, слѣдовательно, другой первый интегралъ уравненія (18), отличный отъ того, который можетъ быть полученъ по только что указанному способу.

Далѣе, съ помощью перваго интеграла (21) уравненія (18)

полный интегралъ того же уравненія можетъ быть безъ затрудненій приведенъ къ формѣ конечной и симметричной относительно $a$ и $b$.

Раздѣляя перемѣнныя въ уравненіи (21), получимъ:

$$dz\left(\frac{e^{\mu(b-a)z}-\alpha}{be^{\mu(b-a)z}-a\alpha}\right)=dx, \text{ или: } dx=\left(\frac{1-\alpha e^{\mu(a-b)z}}{b-a\alpha e^{\mu(a-b)z}}\right)dz$$

откуда:

$$x=\int\frac{\left(1-\alpha e^{\mu(a-b)z}\right)dz}{b-a\alpha e^{\mu(a-b)z}}+\alpha_1$$

Это и есть полный интегралъ уравненія (18)

Если положимъ здѣсь

$$\alpha e^{\mu(a-b)z}=y, \text{ то } \alpha\mu(a-b)e^{\mu(a-b)z}dz=dy,$$

или:

$\mu(a-b)ydz=dy$, откуда: $dz=\frac{1}{\mu(a-b)}\frac{dy}{y}$, вслѣдствіе чего нашъ интегралъ приметъ видъ

$$\mu(a-b)x=\int\frac{(1-y)dy}{y(b-ay)}+\alpha_1$$

Черезъ разложеніе подъинтегральной дроби на частныя дроби находимъ:

$$\int\frac{(1-y)dy}{y(b-ay)}=\frac{a-b}{b}\int\frac{dy}{b-ay}+\frac{1}{b}\int\frac{dy}{y}=-\frac{(a-b)}{ab}log(b-ay)+\frac{1}{b}log\,y$$

Слѣд. имѣемъ:

$$-\mu abx=log(b-ay)+\frac{a}{b-a}log y+log\alpha_1=log\left[\alpha_1 y^{\frac{a}{b-a}}(b-ay)\right]$$

(гдѣ $log\alpha_1$ написано вмѣсто $\alpha_1$)

Подставляя сюда вмѣсто $y$ его значеніе и замѣчая, что $a^{\frac{a}{b-a}}$ можетъ быть заключено въ $\alpha_1$. будемъ имѣть:

$$-\mu abx = log\left[\alpha_1 e^{-\mu az}(b - a\alpha e^{\mu(a-b)z})\right];$$

если напишемъ здѣсь $\alpha_1$ вмѣсто $\alpha_1 b$ и $\alpha$ вмѣсто $-a\alpha\alpha_1$ и потомъ перейдемъ отъ логариѳмовъ къ числамъ, то получимъ полный интегралъ уравненія (18) въ слѣдующей формѣ:

$$\alpha_1 e^{-\mu az} + \alpha e^{-\mu bz} = e^{-\mu abx}$$

которая, какъ видимъ, конечна и симметрична относительно $a$ и $b$.

Если бы $a=b$, то имѣли бы уравненіе:

$$\mu z'(z'-a)^2 + z'' = 0$$

Его интегрирующій множитель по (19) будетъ:

$$N = (z'-a)^{-2}$$

а первый интегралъ по (20):

$$\mu z - (z'-a)^{-1} = \alpha$$

послѣ чего найдется и полный интегралъ.

9. Воспользуемся теперь способомъ перемѣны перемѣнной независимой, изложеннымъ въ § 4 для полученія новыхъ случаевъ интегрируемости изъ тѣхъ, которые мы нашли въ предыдущемъ параграфѣ.

Если въ уравненіи (11) (§ 8) примемъ $z$ за перемѣнную независимую, а $x$ за искомую функцію $z$, то: $z' = x'^{-1}$, $z'' = -x'^{-3}x''$ и уравненіе (11) приметъ слѣдующій видъ:

$$mx'^{-2} + [F(z) + \theta(x)]x'^{-1} + \frac{1}{m}\theta'(x) - x'^{-3}x'' = 0.$$

Интегрирующій множитель этого уравненія (см. § 4, формула 12) будетъ: $x'e^{mz}$

Умноживъ предыдущее уравненіе на $x'^3$, получимъ:

$$mx' + [F(z) + \theta(x)]x'^2 + \theta'(x)\frac{x'^3}{m} - x'' = 0. \qquad (1)$$

Интегрирующій множитель этого послѣдняго уравненія будетъ:

$$N = x'^{-2}e^{mz}$$

первый интегралъ получится замѣщеніемъ $z'$ чрезъ $x'^{-1}$ въ формулѣ (13) § 8, и слѣд. онъ будетъ:

$$\int e^{mz}F(z)\,dz + e^{mz}\left(x'^{-1} + \frac{1}{m}\theta(x)\right) = \alpha$$

Если умножимъ уравненіе (1) на $-1$, замѣстимъ потомъ $m$, $F(z)$ и $\theta(x)$ черезъ $-m$, $-F(z)$, $-\theta(x)$ и переставимъ буквы $x$ и $z$, называя черезъ $x$ перемѣнную независимую, а черезъ $z$ главную перемѣнную, то получимъ слѣдующій результатъ:

Уравненіе

$$mz' + [F(x) + \theta(z)]z'^2 - \frac{z'^3}{m}\theta'(z) + z'' = 0$$

интегрируется; его интегрирующій множитель есть

$$N = z'^{-2}e^{-mx}$$

и первый интегралъ этого уравненія есть:

$$\int e^{-mx}F(x)\,dx - e^{-mx}\left[z'^{-1} + \frac{1}{m}\theta(z)\right] = \alpha$$

Для $\theta(z) = 0$ будемъ имѣть весьма простое уравненіе:

$$mz' + F(x)z'^2 + z'' = 0 \qquad (2)$$

интегрирующій множитель котораго по предъидущему будетъ:

$$N=z'^{-2}e^{-mx}$$

а первый интегралъ:

$$\int e^{-mx}F(x)dx-e^{-mx}z'^{-1}=\alpha \tag{3}$$

Замѣтимъ, что уравненіе (2) не можетъ быть проинтегрировано по формуламъ даннымъ въ § 5 для уравненій вида

$$Cz'+Dz'^2+Ez''=0$$

ибо въ уравненіи (2): $C=m$, $D=F(x)$, $E=1$ и условіе

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{C}{E}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{D}{E}\right)$$

не удовлетворено.

Но первый интегралъ (3) уравненія (2) получается очень легко по способу измѣненія произвольной постоянной; въ самомъ дѣлѣ, отбрасывая во (2) членъ $F(x)z'^2$, имѣемъ:

$$mz'+z''=0$$

откуда:

$$z'=\alpha e^{-mx} \tag{4}$$

Вносимъ это значеніе $z'$ во (2), разсматривая $\alpha$, какъ искомую функцію $x$, которую нужно опредѣлить такъ, чтобы уравненіе (3) удовлетворялось; будемъ имѣть:

$$\alpha^2e^{-2mx}F(x)+e^{-mx}\frac{d\alpha}{dx}=0,\ \text{откуда:}\ \frac{d\alpha}{\alpha^2}=-e^{-mx}F(x)dx$$

и слѣд. $\alpha^{-1}=\int e^{-mx}F(x)dx+\alpha_1$, гдѣ $\alpha_1$ произвольная постоянная.

Опредѣливъ такимъ образомъ функцію $\alpha$, подставляемъ ея значеніе въ (4) или въ $z'^{-1}e^{-mx}=\alpha^{-1}$ и получаемъ первый интегралъ уравненія (2):

$$z'^{-1}e^{-mx}=\int e^{-mx}F(x)dx+\alpha_1$$

что совершенно согласно съ интеграломъ (3), найденнымъ по способу интегрирующаго множителя.

Возьмемъ еще уравненіе (14) § 8 и будемъ въ немъ разсматривать $z$, какъ перемѣнную независимую, а $x$, какъ искомую функцію $z$; то замѣщая въ немъ:

$$z'=x'^{-1},\ z''=-x'^{-3}x''$$

получимъ уравненіе:

$$F(z)x'^{-1}\ [x'^{-1}-\varphi(x)]\left[x'^{-1}-\varphi(x)-\frac{m}{F(z)}\right]-x'^{-3}x''-\varphi'(x)=0$$

интегрирующій множитель котораго будетъ:

$$x'e^{mz}[x'^{-1}-\varphi(x)]^{-2}$$

Умноживъ предыдущее уравненіе на $x'^3$, получимъ:

$$F(z)\ [1-x'\varphi(x)]\left[1-x'\varphi(x)-\frac{mx'}{F(z)}\right]-x''-x'^3\varphi'(x)=0 \qquad (5)$$

Интегрирующій множитель этого уравненія будетъ:

$$N=x'^{-2}e^{mz}[x'^{-1}-\varphi(x)]^{-2}$$

Уравненіе (5) мы напишемъ слѣдующимъ образомъ:

$$F(z)\varphi(x)\left[x'-\frac{1}{\varphi(x)}\right]\left[x'-\frac{1}{\varphi(x)+\frac{m}{F(z)}}\right]\left[\varphi(x)+\frac{m}{F(z)}\right]-x''-x'^3\varphi'(x)=0$$

Положимъ здѣсь:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\psi(x)},\ \text{то}\ \varphi'(x)=-\frac{\psi'(x)}{\psi^2(x)},\ \varphi(x)+\frac{m}{F(z)}=\frac{F(z)+m\psi(x)}{F(z)\psi(x)}$$

вслѣдствіе чего наше уравненіе, по умноженіи обѣихъ частей на $\psi^2(x)$, приметъ видъ

$$\left[F(z)+m\psi(x)\right]\left[x'-\psi(x)\right]\left[x'-\frac{\psi(x)F(z)}{F(z)+m\psi(x)}\right]-\psi^2(x)x''+x'^3\psi'(x)=0 \qquad (6)$$

Интегрирующій множитель послѣдняго уравненія будетъ:

$$N = x'^{-2}\, e^{mz} \cdot \left[x'^{-1} - \frac{1}{\psi(x)}\right]^{-2} \psi^{-2}(x), \text{ или: } N = e^{mz}[\psi(x) - x']^{-2}$$

а первый интегралъ, получаемый изъ формулы (16) § 8 замѣщеніемъ $z'$ на $x'^{-1}$ и $\varphi(x)$ на $\frac{1}{\psi(x)}$ будетъ:

$$\int e^{mz} F(z)dz - e^{mz}\left[\frac{1}{x'} - \frac{1}{\psi(x)}\right]^{-1} = \alpha$$

Если теперь переставимъ въ (6) буквы $x$ и $z$, т. е. назовемъ черезъ $x$ перемѣнную независимую, умножимъ уравненіе на —1 и измѣнимъ $F(z)$ и $m$ въ $-F(z)$ и $-m$, то получимъ слѣдующій результатъ:

Уравненіе

$$[F(x)+m\psi(z)]\ [z'-\psi(z)]\ \left[z' - \frac{F(x)\psi(z)}{F(x)+m\psi(z)}\right] - \psi'(z)z'^3 + \psi^2(z)z'' = 0 \qquad (7)$$

интегрируется; интегрирующій множитель этого довольно сложнаго по видимому уравненія весьма простъ, именно:

$$N = e^{-mx}[\psi(z) - z']^{-2}$$

а первый интегралъ:

$$\int e^{-mx} F(x)\,dx + e^{-mx} z'\psi(z)[\psi(z) - z']^{-1} = \alpha$$

И такъ черезъ перемѣну перемѣнной независимой мы получимъ для уравненія (7) интегрирующій множитель и первый интегралъ, зная ихъ выраженія для уравненія (14) § 2, которое по своей формѣ существенно отличается отъ уравненія (7).

10. Переходимъ къ разсмотрѣнію случаевъ, когда одинъ изъ коэффиціентовъ $B$ или $A$ въ общемъ уравненіи ($A$) § 1 равенъ нулю.

Пусть $B=0$, то условіе ($B$) § 1 сведется на

$$d\frac{\left(\frac{A}{E}\right)}{dy}+m\frac{AD}{E^2}=0,\ \text{или}\ d\frac{log\left(\frac{A}{E}\right)}{dy}=-m\frac{D}{E}$$

откуда:

$$A=E\varphi(x)e^{-m\int_{y_0}^{y}\frac{D}{E}dy}$$

гдѣ $\varphi(x)$ какая угодно функція $x$, а нижній предѣлъ $y_0$ интегрированія по $y$ произвольно выбранная постоянная величина.

Таковъ долженъ быть видъ функціи $A$ для того, чтобы уравненіе

$$A+Cy'^m+Dy'^{m+1}+Ey'^{m-1}y''=0$$

могло интегрироваться по нашему способу.

Значитъ, мы имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Уравненіе

$$E\varphi(x)e^{-m\int_{y_0}^{y}\frac{D}{E}dy}+Cy'^m+Dy'^{m+1}+Ey'^{m-1}y''=0 \tag{1}$$

удовлетворяющее условіе $\frac{d}{dy}\left(\frac{C}{E}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{D}{E}\right)$ интегрируется.

Его интегрирующій множитель есть

$$M=\frac{1}{E}e^{mp} \tag{2}$$

$$\text{гдѣ}\ p=\int_{y_0}^{y}\left(\frac{D}{E}\right)dy+\int_{x_0}^{x}\left(\frac{C}{E}\right)_{y_0}dx$$

$\left[\left(\frac{C}{E}\right)_{y_0}\right.$ изображаетъ результатъ подставленія $y_0$ вм. $y$ въ $\left.\frac{C}{E}\right]$

а первый интегралъ:

$$\int E\varphi(x)e^{m\int_{x_0}^{x}\left(\frac{C}{E}\right)_{y_0}dx}dx+\frac{e^{mp}}{m}y'^m=\alpha \tag{3}$$

Пусть напр. дано уравненіе

$$\varphi(x)\, y e^{mx^py^q} - (y+px^py^{q+1})y'^m - qx^{p+1}y^qy'^{m+1} + xyy'^{m-1}y'' = 0 \qquad (4)$$

Здѣсь

$$B=0,\ C=-(y+px^py^{q+1}),\ D=-qx^{p+1}y^q,\ E=xy$$

слѣд.

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{C}{E}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{D}{E}\right)=-pqx^{p-1}y^{q-1},\ -\int_0^y\frac{D}{E}dy=x^py^q$$

и какъ въ данномъ уравненіи $A=\varphi(x)ye^{mx^py^q}$, то оно по предъидущему интегрируется; интегрирующій множитель уравненія (4) есть:

$$M=\frac{1}{xy}e^{mr},\ \text{гдѣ}\ r=-q\int_0^y x^py^{q-1}dy-\int_1^x\frac{dx}{x}=-x^py^q-lgx$$

и слѣд.

$$M=\frac{1}{x^{m+1}y}\, e^{-mx^py^q}$$

а первый интегралъ будетъ:

$$\int\varphi(x)\frac{dx}{x^{m+1}}+\frac{1}{mx^m}\, e^{-mx^py^q}y'^m=\alpha$$

Полагая въ (1) $m=-1$ и умноживъ все уравненіе на $y'^2$, будемъ имѣть:

$$\left(E\varphi(x)e^{\int_{y_0}^y\frac{D}{E}dy}+D\right)y'^2+Cy'+Ey''=0$$

Если коэффиціенты этого уравненія удовлетворяютъ условію

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{C}{E}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{D}{E}\right)$$

то интегрирующій множитель его будетъ:

$$N=\frac{1}{E}e^{-p}y'^{-2},\ \text{гдѣ}\ p=\int_{y_0}^y\frac{D}{E}dy+\int_{x_0}^x\left(\frac{C}{E}\right)_{y_0}dx$$

а первый интегралъ:

$$\int E\varphi(x)e^{-\int_{x_0}^{x}\left(\frac{C}{E}\right)_{y_0} dx} dx - e^{-p}y'^{-1} = \alpha$$

Допустимъ теперь, что въ уравненіи (1) коэффиціенты $E$, $C$ и $D$ имѣютъ слѣдующій видъ:

$E = \psi(y)$, $C = \theta(x)\psi(y)$, $D = n\psi'(y)$ ($n$ величина постоянная),

то: $\frac{C}{E} = \theta(x)$, $\frac{D}{E} = \frac{n\psi'(y)}{\psi(y)}$ и условіе $\frac{d}{dy}\left(\frac{C}{E}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{D}{E}\right)$ очевидно удовлетворено. По выбранымъ такимъ образомъ значеніямъ $C$, $D$, $E$ найдемъ выраженіе 1-го члена $A$ въ уравненіи (1); мы имѣемъ

$\int \frac{D}{E} dy = nlg\psi(y)$ и слѣд. $A = E\varphi(x)e^{-mnlg\psi(y)} = \varphi(x)[\psi(y)]^{-mn+1}$

И такъ мы утверждаемъ, что уравненіе

$$\varphi(x)\,[\psi(y)]^{-mn+1} + \theta(x)\psi(y)y'^{m} + n\psi'(y)y'^{m+1} + \psi(y)y'^{m-1}y'' = 0 \quad (5)$$

интегрируется; его интегрирующій множитель будетъ:

$$M = \frac{1}{\psi(y)}e^{mp}, \text{ гдѣ } p = \int\theta(x)dx + lg[\psi(y)]^{n}$$

и слѣд.

$$M = [\psi(y)]^{mn-1}e^{m\int\theta(x)dx}. \quad (6)$$

Первый интегралъ уравненія (3) есть

$$\int\varphi(x)e^{m\int\theta(x)dx}dx + \psi^{nm}(y)\,e^{m\int\theta(x)dx}\frac{y'^{m}}{m} = \alpha \quad (7)$$

Замѣтимъ, что уравненіе (3), будучи умножено на первый факторъ $[\psi(y)]^{mn-1}$ интегрирующаго множителя принимаетъ видъ:

$$\varphi(x) + \theta(x)\psi^{mn}(y)y'^{m} + n\psi^{nm-1}(y)\psi'(y)y'^{m+1} + \psi^{nm}(y)y'^{m-1}y'' = 0$$

Послѣднее уравненіе можетъ быть сведено на уравненіе Бернулли, если положимъ $\frac{\psi^{nm}(y)y'^m}{m} = y_1$, ибо тогда:

$n\psi^{mn-1}(y)\psi'(y)y'^{m+1} + \psi^{nm}(y)y'^{m-1}y'' = y_1'$, и наше уравненіе напишется такъ

$$\varphi(x) + m\theta(x)y_1 + y'_1 = 0$$

Это есть уравненіе Бернулли, въ которомъ $y_1$ главная перемѣнная, и слѣд. интегрирующій множитель его будетъ $e^{m\int\theta(x)\,dx}$ что составляетъ второй факторъ можителя $M$.

Но предложеніе, относящееся къ уравненію (1), доставляетъ намъ здѣсь все: во первыхъ оно приводитъ насъ къ интегрируемому уравненію (5), за тѣмъ по формуламъ (2) и (3) мы получаемъ полный интегрирующій множитель (6) и первый интегралъ (7) уравненія (5).

Уравненіе (5) интегрируется окончательно посредствомъ квадратуръ, ибо въ первомъ его интегралѣ (7) перемѣнныя раздѣляются; мы имѣемъ:

$$[\psi^n(y)y']^m = \frac{\alpha - m\int\varphi(x)\,e^{m\int\theta(x)dx}\,dx}{e^{m\int\theta(x)dx}} = F(x,\alpha) \tag{8}$$

(гдѣ функція $F(x,\alpha)$ введена для краткости)

Извлекая изъ обѣихъ частей корень $m$-ой степени, умножая потомъ уравненіе на $dx$ и интегрируя его въ обѣихъ частяхъ, получимъ:

$$\int\psi^n(y)dy - \int[F(x,\alpha)]^{\frac{1}{m}}dx = \alpha_1 \tag{9}$$

Это и есть полный интегралъ уравненія (5).

Положимъ въ (5) $m = -1$ и умножимъ все уравненіе на $y'^2$; будемъ имѣть:

$$\left\{\varphi(x)[\psi(y)]^{n+1} + n\psi'(y)\right\}y'^2 + \theta(x)\psi(y)y' + \psi(y)y'' = 0 \tag{10}$$

Интегрирующій множитель этого уравненія будетъ

$$N=[\psi(y)]^{-(n+1)} e^{-\int\theta(x)dx} y'^{-2}, \tag{11}$$

а первый интегралъ по (7):

$$\int\varphi(x)e^{-\int\theta(x)dx}dx-\psi^{-n}(y)e^{-\int\theta(x)dx}y'^{-1}=\alpha \tag{12}$$

Далѣе, полагая въ (8) $m=-1$, имѣемъ:

$$F(x,\alpha)=\frac{\alpha+\int\varphi(x)e^{-\int\theta(x)dx}dx}{e^{-\int\theta(x)dx}}$$

а по (9) полный интегралъ при $m=-1$ будетъ:

$$\int\psi^n(y)\,dy-\int\frac{dx}{F(x,\alpha)}=\alpha_1$$

Подставляя сюда вмѣсто $F(x,\alpha)$ предъидущее выраженіе, получимъ полный интегралъ уравненія (10) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\int\psi^n(y)dy-\int\frac{e^{-\int\theta(x)dx}dx}{\alpha+\int\varphi(x)e^{-\int\theta(x)dx}dx}=\alpha_1 \tag{13}$$

Если въ (10) $\varphi(x)$=пост. величинѣ $m$, то мы получимъ уравненіе

$$\{m[\psi(y)]^{n+1}+n\psi'(y)\}y'^2+\theta(x)\psi(y)y'+\psi(y)y''=0 \tag{14}$$

интегрирующій множитель котораго будетъ имѣть выраженіе (11), а первый интегралъ его по (12) есть

$$m\int e^{-\int\theta(x)dx}dx-\psi^{-n}(y)e^{-\int\theta(x)dx}y'^{-1}=\alpha \tag{15}$$

Съ другой стороны, сравнивая (14) съ уравненіемъ (1) § 5, имѣемъ:

$$C=\theta(x)\psi(y),\ D=m[\psi(y)]^{n+1}+n\psi'(y),\ E=\psi(y)$$

при чемъ условіе $\frac{d}{dy}\left(\frac{C}{E}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{D}{E}\right)$ очевидно удовлетворено и слѣд. уравненіе (14) можетъ быть проинтегрировано по формуламъ § 5, то есть оно имѣетъ интегрирующій множитель

$$M=\frac{1}{\psi(y)}e^{nlg\psi(y)+m\int\psi^n(y)\,dy+\int\theta(x)dx}=[\psi(y)]^{n-1}e^{\int\theta(x)dx+m\int\psi^n(y)dy}$$

и первый интегралъ:

$$y'\psi^n(y)e^{\int\theta(x)dx+m\int\psi^n(y)dy}=\alpha_1 \tag{16}$$

Имѣя такимъ образомъ 2 первыхъ интеграла (15) и (16) уравненія (14), мы можемъ исключить изъ нихъ $y'$; изъ (16) выводимъ:

$y'^{-1}\psi^{-n}(y)e^{\int\theta(x)dx}=\alpha_1e^{m\int\psi^n(y)dy}$ (гдѣ $\alpha_1$ написано вмѣсто $\alpha_1^{-1}$)

подставляя это выраженіе въ (15), получаемъ

$$\alpha+m\int e^{-\int\theta(x)dx}dx=\alpha_1e^{m\int\psi^n(y)dy}$$ ($\alpha$ написано вм $-\alpha$)

или, взявъ $lg$ отъ обѣихъ частей равенства и замѣщая $lg\ \alpha_1$ черезъ $\alpha_1$, будемъ имѣть

$$lg\left[\alpha+m\int e^{-\int\theta(x)dx}dx\right]=\alpha_1+m\int\psi^n(y)dy$$

Это отношеніе между $x,y$ и 2-мя произвольными постоянными $\alpha$ и $\alpha_1$ представляетъ полный интегралъ уравненія (14).

Результатъ этотъ совершенно согласенъ съ формулою (13), по которой полный интегралъ уравненія (14) есть:

$$\int\psi^n(y)dy - \int \frac{e^{-\int\theta(x)dx}dx}{\alpha + m\int e^{-\int\theta(x)dx}dx} = \alpha_1$$

или

$$\int\psi^n(y)dy - \frac{1}{m} lg\left(\alpha + m\int e^{-\int\theta(x)dx}dx\right) = \alpha_1$$

Возвращаемся теперь къ уравненію (10) и полагаемъ въ немъ:

$n = -1$, $\psi(y) = y$; то $\psi'(y) = 1$ и получается уравненіе

$$[\varphi(x) - 1]y'^2 + \theta(x)yy' + yy'' = 0$$

назовемъ: $\varphi(x) - 1 = f(x)$, или $\varphi(x) = f(x) + 1$, и раздѣлимъ обѣ части уравненія на $y$, будетъ:

$$f(x)y^{-1}y'^2 + \theta(x)y' + y'' = 0 \tag{17}$$

Интегрирующій множитель этого уравненія по (11) есть:

$$N = yy'^{-2}e^{-\int\theta(x)dx} \tag{18}$$

а первый и полный его интегралы по (12) и (13) суть:

$$\int (f(x)+1)e^{-\int\theta(x)dx}dx - ye^{-\int\theta(x)dx}y'^{-1} = \alpha \tag{19}$$

$$lgy = \alpha_1 + \int \frac{e^{-\int\theta(x)dx}dx}{\alpha + \int [f(x)+1]e^{-\int\theta(x)dx}dx} \tag{20}$$

Пусть $f(x)$=пост. величинѣ $p$, $\theta(x)=x^{-1}$, то

$$e^{-\int x^{-1}dx}=e^{-\int\theta(x)dx}=\frac{1}{x}$$

а потому интегрирующій множитель, первый и полный интегралъ уравненія

$$py^{-1}y'^2+x^{-1}y'+y''=0 \tag{21}$$

получаемые по формуламъ (18, (19) и (20), будутъ:

$$N=x^{-1}yy'^{-2} \tag{22}$$

$$(p+1)lgx-x^{-1}yy'^{-1}=\alpha \tag{23}$$

$$lgy=\alpha_1+\frac{1}{p+1}lg[\alpha+(p+1)lgx]$$

Если умножимъ обѣ части послѣдняго равенства на $p+1$, напишемъ въ немъ $lg\alpha$ вмѣсто $\alpha$ и $lg\alpha_1$ вмѣсто $\alpha_1(p+1)$ и потомъ перейдемъ отъ логариѳмовъ къ числамъ, то получимъ:

$$y^{p+1}=\alpha_1 lg(\alpha x^{p+1}) \tag{24}$$

При всякомъ $p$, отличномъ отъ $-1$, это отношеніе представляетъполный интегралъ уравненія (21).

Когда $p=-1$, то полный интегралъ уравненія

$$x^{-1}y'-y^{-1}y'^2+y''=0 \tag{25}$$

получается весьма просто по общей формулѣ (20); формула же (24) для $p=-1$ принимаетъ неопредѣленный видъ. Тѣмъ не менѣе есть средство для полученія полнаго интеграла уравненія (25) изъ формулы (24), а именно теорія предѣловъ. Для этого, какъ извѣстно, нужно разсматривать $p$ сперва отличнымъ отъ $-1$ и потомъ искать предѣлъ, къ которому стремится выраженіе

$$y=[\alpha_1 log(\alpha x^{p+1})]^{\frac{1}{p+1}}$$

по мѣрѣ того, какъ $p$ стремится къ $-1$.

Чтобы разысканіе этого предѣла сдѣлать удобнѣе, мы преобразуемъ послѣднее выраженіе для $y$; оно можетъ быть написано такъ:

$$y = (\alpha_1 \log \alpha)^{\frac{1}{p+1}} [1 + \frac{(p+1)}{\log \alpha} \log x]^{\frac{1}{p+1}}$$

Напишемъ здѣсь $\alpha_1$ вмѣсто $(\alpha_1 \log \alpha)^{\frac{1}{p+1}}$ и $\alpha$ вмѣсто $\frac{1}{lg\alpha}$; будемъ имѣть

$$y = \alpha_1 [1 + (p+1) lg x^{\alpha}]^{\frac{1}{p+1}} \tag{26}$$

Это равенство представляетъ также, какъ и (24), полный интегралъ уравненія (21) при всякомъ $p$ отличномъ отъ $-1$; но равенство (26) позволяетъ весьма легко опредѣлить предѣлъ, къ которому стремится $y$ по мѣрѣ того, какъ $p+1$ стремится къ 0.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ въ (26) $\log x^{\alpha} = k$ и замѣтимъ что $k$ не зависитъ отъ $p$; далѣе назовемъ $k(p+1) = \frac{1}{m}$, то $\frac{1}{p+1} = km$; когда $p+1$ стремится къ 0, $m$ стремится къ $\infty$ и мы получимъ:

$$\lim y = \alpha_1 \lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{km} = \alpha_1 \left[\lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}_{m=\infty}\right]^{k} = \alpha_1 e^k = \alpha_1 x^{\alpha}$$

И такъ $y = \alpha_1 x^{\alpha}$ будетъ полный интегралъ уравненія (25). Уравненіе (21) по своей формѣ заключается въ уравненіи (3) § 4 (гдѣ нужно будетъ положить $f(x) = x^{-1}$, $F(y) = py^{-1}$) слѣд. оно имѣетъ также интегрирующій множитель

$$M = e^{\int x^{-1} dx + p \int y^{-1} dy} = x y^p \quad \text{(формула (4) § 4)}$$

и первый интегралъ: $y' x y^p = \alpha_1$ (формула (5) § 4) (27)

Ислючимъ теперь $y'$ изъ обоихъ первыхъ интеграловъ (23) и (27) уравненія (21); изъ (27) имѣемъ $y y'^{-1} x^{-1} = \alpha_1 y^{p+1}$ и под-

ставляя это выраженіе въ (23), получаемъ полный интегралъ уравненія (21)

$$(p+1)lgx - \alpha_1 y^{p+1} = \alpha$$

что согласно съ формулою (24).

Если въ (17) $\theta(x)=0$, то получается уравненіе:

$$f(x)\, y^{-1} y'^2 + y'' = 0.$$

Интегрирующій множитель, первый и полный интегралъ этого уравненія (по формуламъ (18), (19) и (20)) будутъ:

$$N = yy'^{-2}$$

$$\int (f(x)+1)dx - yy'^{-1} = \alpha$$

$$logy = \alpha_1 + \int \frac{dx}{\alpha + \int [f(x)+1]dx}$$

Пусть напр. $f(x) = 2x - 1$, то по послѣдней формулѣ

$$logy = \alpha_1 + \int \frac{dx}{\alpha + x^2} = \alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}$$

или, замѣщая здѣсь $\alpha_1$ черезъ $-lg\alpha_1$ и $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ черезъ $\alpha$, получимъ:

$$lg(\alpha_1 y) = \alpha\ arc.lg(\alpha x).$$

Таковъ полный интегралъ уравненія

$$(2x-1)\, y^{-1} y'^2 + y'' = 0.$$

11. Если въ общемъ уравненіи $(A)$ § 1 коэффиціентъ $B$

отличенъ отъ нуля и $A=0$, то подобно предъидущему найдемъ, что уравненіе

$$E\varphi(y)e^{-m\int_{x_0}^{x}\frac{C}{E}dx} + Cy'^{m-1} + Dy'^{m} + Ey'^{m-2}\,y'' = 0 \quad (1)$$

удовлетворяющее условію $\frac{d}{dy}\left(\frac{C}{E}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{D}{E}\right)$ интегрируется; его интегрирующій множитель будетъ

$$N = \frac{1}{E}\,e^{mp}\,y', \text{ гдѣ } p = \int_{x_0}^{x}\frac{C}{E}\,dx + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{D}{E}\right)_x dy$$

а первый интегралъ:

$$\int\varphi(y)e^{m\int_{y_0}^{y}\left(\frac{D}{E}\right)_{x_0}dy}\,dy + \frac{e^{mp}}{m}\,y'^{m} = \alpha$$

Далѣе, совершенно тѣмъ же путемъ, какъ въ случаѣ $B=0$, выведемъ изъ предложенія относящагося къ уравненію (1) что интегрирующій множитель уравненія

$$\varphi(y)\,[\psi(x)]^{-nm+1} + n\,\psi'(x)y'^{m-1} + \psi(x)\;\theta(y)\;y'^{m} + \psi(x)\;y'^{m-2}\,y'' = 0 \quad (2)$$

есть

$$N = y'[\psi(x)]^{nm-1}e^{m\int\theta(y)dy}$$

а первый интегралъ:

$$\int\varphi(y)\;e^{m\int\theta(y)\,dy}\,dy + \frac{\psi^{nm}(x)}{m}\;y'^{m}\;e^{m\int\theta(y)dy} = \alpha$$

Разрѣшая послѣднее уравненіе относительно $\psi^{nm}(x)\;y'^{m}$, находимъ:

$$\psi^{nm}(x)\;y'^{m} = \frac{\alpha - m\int\varphi(y)\;e^{m\int\theta(y)\,dy}\,dy}{e^{m\int\theta(y)dy}} = F(y,\alpha) \quad \text{(для краткости)}$$

откуда получимъ полный интегралъ уравненія (2):

$$\int\frac{dx}{[\psi(x)]^n}-\int\frac{dy}{[F(y,\alpha)]^{\frac{1}{m}}}=\alpha_1$$

Полагая во (2) $m=1$ и умножая уравненіе на $y'$, будемъ имѣть уравненіе

$$\left\{\varphi(y)[\psi(x)]^{-(n-1)}+n\psi'(x)\right\}y'+\psi(x)\theta(y)y'^2+\psi(x)y''=0 \qquad (3)$$

для котораго интегрирующій множитель первый и полный интегралы по предыдущимъ формуламъ будутъ:

$$M=[\psi(x)]^{n-1}e^{\int\theta(y)dy} \qquad (4)$$

$$\int\varphi(y)e^{\int\theta(y)dy}dy+\psi^n(x)y'e^{\int\theta(y)dy}=\alpha \qquad (5)$$

$$\int\frac{dx}{\psi^n(x)}+\int\frac{e^{\int\theta(y)dy}dy}{\alpha+\int\varphi(y)e^{\int\theta(y)dy}dy}=\alpha_1 \qquad (6)$$

Если $\varphi(y)$=пост. величинѣ $m$, то уравненіе (3) принимаетъ форму:

$$\left\{m[\psi(x)]^{-(n-1)}+n\psi'(x)\right\}y'+\psi(x)\theta(y)y'^2+\psi(x)y''=0 \qquad (7)$$

одинаковую съ уравненіемъ (1) § 5, при чемъ условіе

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{C}{E}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{D}{E}\right)$$

удовлетворено и слѣдов. уравненіе (7) кромѣ интегрирующаго множителя (4) и перваго интеграла

$$m\int e^{\int\theta(y)dy}dy+\psi^n(x)y'e^{\int\theta(y)dy}=\alpha \quad \text{(по формулѣ (5))} \qquad (8)$$

имѣетъ еще интегрирующій множитель

$$L = [\psi(x)]^{n-1} e^{\int\theta(y)dy + m\int\psi^{-n}(x)\,dx} \tag{9}$$

и первый интегралъ

$$y'\psi^n(x)\, e^{\int\theta(y)dy + m\int\psi^{-n}(x)\,dx} = \alpha_1 \tag{10}$$

По формулѣ (6) полный интегралъ уравненія (7) есть:

$$lg\,[\alpha + m\int e^{\int\theta(y)\,dy}\,dy]^{-1} = \alpha_1 + m\int\psi^{-n}(x)\,dx$$

(гдѣ пост. произв. $\alpha_1$ отлично отъ $\alpha_1$ находящейся въ (6)).

Тотъ же самый результатъ доставляетъ исключеніе $y'$ между первыми интегралами (8) и (10).

Положимъ еще въ (3) $\psi(x) = x$, $n = 1$, обозначимъ $\varphi(y) + 1 = f(y)$ и раздѣлимъ все уравненіе на $x$; получимъ

$$f(y)x^{-1}y' + \theta(y)y'^2 + y'' = 0 \tag{11}$$

интегрирующій множитель, первый и полный интегралъ этого уравненія на основаніи формулъ (4), (5), (6) будутъ

$$M = xe^{\int\theta(y)\,dy}$$

$$\int[f(y) - 1]e^{\int\theta(y)dy}dy + xy'e^{\int\theta(y)\,dy} = \alpha$$

$$log\,x^{-1} = \alpha_1 + \int\frac{e^{\int\theta(y)dy}\,dy}{\alpha + \int[f(y) - 1]e^{\int\theta(y)dy}\,dy}$$

Для $\theta(y)=0$ уравненіе (11) перейдетъ въ

$$f(y)x^{-1}y'+y''=0 \tag{12}$$

и по предъидущимъ формуламъ интегрирующій множитель этого уравненія есть

$$M=x \tag{13}$$

а первый и полный интегралы уравненія суть

$$\int(f(y)-1)dy+xy'=\alpha \tag{14}$$

$$lgx^{-1}=\alpha_1+\int\frac{dy}{\alpha+\int(f(y)-1)dy} \tag{15}$$

Напр. если $f(y)=2y+1$, то полный интегралъ уравненія

$$(2y+1)x^{-1}y'+y''=0$$

по послѣдней формулѣ будетъ:

$$log(\alpha_1 x^{-1})=\alpha arc.tg(\alpha y).$$

12. Въ послѣднихъ двухъ параграфахъ мы разсмотрѣли нѣкоторыя дифференціальныя уравненія 2-го порядка, для которыхъ представилась возможность найти по 2 интегрирующихъ множителя.

Но мы не знали à priori будутъ ли первые интегралы, доставляемые этими множителями, существенно различны между собой, или одинъ изъ нихъ будетъ слѣдствіемъ другаго.

Далѣе, найдя эти интегралы мы исключали изъ нихъ $y'$ и получали въ результатѣ нѣкоторое отношеніе между $x$, $y$ и 2-мя произвольными постоянными $\alpha, \alpha_1$, которое представляло полный интегралъ дифф. уравненія; если бы этотъ результатъ исключенія не зависѣлъ отъ $x$ и $y$, а свелся бы на

отношеніе между однѣми только пост. произв. $\alpha$. $\alpha_1$, то это значило бы, что одинъ изъ найденныхъ первыхъ интеграловъ есть слѣдствіе другаго.

Изложенныя только что обстоятельства привели насъ къ изслѣдованію слѣдующихъ двухъ вопросовъ.

I. *Извѣстны два первые интеграла дифференціальнаго уравненія n-го порядка между двумя измѣняемыми; узнать существенно-ли различны между собой эти интегралы, или нѣтъ?*

II. *Найдены 2 интегрирующіе множителя дифф. уравненія n-го порядка; узнать á priori будутъ ли первые интегралы, доставляемые этими множителями существенно различны между собой, или нѣтъ?*

13. Прежде нежели мы займемся доказательствомъ теоремъ, рѣшающихъ постановленные вопросы, считаемъ не лишнимъ разсмотрѣть здѣсь общія формы всѣхъ первыхъ интеграловъ и всѣхъ интегрирующихъ множителей дифф. уравненія $n$-го порядка, вида:

$$F(x,y,y'\dots y^{(n)})=0. \qquad (1)$$

Уравненіе это, какъ извѣстно, имѣетъ $n$ существенно различныхъ первыхъ интеграловъ, которые пусть будутъ:

$$f_1(x,y,y'\dots y^{(n-1)})=\alpha_1,\ f_2(x,y,y'\dots y^{(n-1)})=\alpha_2\dots\dots f_n(xyy'.,.y^{(n-1)})=\alpha_n \qquad (2)$$

($\alpha_1\dots\alpha_n$ суть произвольныя постоянныя).

При этомъ самая общая форма всѣхъ первыхъ интеграловъ уравненія (1) есть:

$$\Pi(f_1,f_2\dots f_n)=\alpha \qquad (3)$$

гдѣ $\Pi$ означаетъ произвольную функцію, а $\alpha$ произвольную постоянную.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$\varphi(x\ y,\ y'\dots y^{(n-1)})=\alpha \qquad (4)$$

будетъ какой нибудь первый интегралъ уравненія (1).

Для доказательства *, что этотъ интегралъ можетъ быть приведенъ къ формѣ (3), замѣчаемъ, что изъ $n$ уравненій (2) $n$ величинъ $y\ y' \dots\ y^{(n-1)}$ могутъ быть выражены посредствомъ $x,\ \alpha_1\ \alpha_2 \dots\ \alpha_n$, или что тоже посредствомъ $x,\ f_1\ f_2 \dots\ f_n$.

Если найденныя такимъ образомъ выраженія $y\ y' \dots\ y^{(n-1)}$ внесемъ въ (4), то это уравненіе приметъ видъ:

$$\psi(x, f_1, f_2 \dots f_n) = \alpha. \qquad (5)$$

Дифференцируя послѣднее равенство въ обѣихъ частяхъ сполна по $x$, имѣемъ:

$$\frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{df_1}df_1 + \frac{d\psi}{df_2}df_2 + \dots + \frac{d\psi}{df_n}df_n = 0$$

Но въ силу (2)

$$df_1 = 0,\ df_2 = 0 \dots\ df_n = 0$$

а потому необходимо, чтобы $\frac{d\psi}{dx} = 0$.

И такъ функція $\psi$ не зависитъ отъ $x$ и слѣд. уравненіе (5), которое есть ни что иное, какъ уравненіе (4) одинаковой формы съ (3) ч. и д. н.

Всякая функція $N$ отъ $x,\ y,\ y' \dots\ y^{(n-1)}$, удовлетворяющая равенству

$$NF = \frac{df}{dx}$$

называется интегрирующимъ множителемъ уравненія (1); при этомъ $f = \alpha$ будетъ первый интегралъ ур. (1), который мы будемъ называть «первымъ интеграломъ соотвѣтствующимъ интегрирующему множителю $N$».

Лагранжъ доказалъ, что для каждаго перваго интеграла ур. (1) существуетъ соотвѣтствующій интегрирующій множитель.

---

*) Это доказательство мы заимствуемъ изъ сочиненія Serret «Traité du calcul différentiel et intégral».

Обозначимъ черезъ $M_1, M_2 \ldots M_n$ интегрирующіе множители, соотвѣтствующіе $n$ первымъ интеграламъ (2) т е

$$M_1F=\frac{df_1}{dx},\quad M_2F=\frac{df_2}{dx},\ldots\quad M_nF=\frac{df_n}{dx} \tag{6}$$

Далѣе, если $\Pi'(f_1)$, $\Pi'(f_2)\ldots$ $\Pi'(f_n)$ будутъ изображать частныя производныя произвольной функціи $\Pi(f_1\, f_2\cdots f_n)$ по $f_1, f_2 \ldots f_n$, то самая общая форма всѣхъ интегрирующихъ множителей уравненія (1) будетъ:

$$N=M_1\Pi'(f_1)+M_2'\Pi(f_2)+\ldots+M_n\Pi'(f_n) \tag{7}$$

Чтобы убѣдиться, что $N$ будетъ интегрирующимъ множителемъ уравненія (1), достаточно умножить обѣ части (7) на $F$; будемъ имѣть:

$$NF=M_1F\Pi'(f_1)+M_2F\Pi'(f_2)+\ldots+M_nF\Pi'(f_n)$$

или, въ силу (6)

$$NF=\Pi'(f_1)\frac{df_1}{dx}+\Pi'(f_2)\frac{df_2}{dx}+\ldots+\Pi'(f_n)\frac{df_n}{dx}=\frac{d\Pi}{dx}$$

и слѣд. $\Pi=\alpha$ будетъ первый интегралъ, соотвѣтствующій интегрирующему множителю $N$.

Эта общая форма (7) интегрирующихъ множителей указана Лагранжемъ (для дифф. уравненій 2-го порядка).

Для доказательства, что (7) есть самая общая форма интегрирующихъ множителей положимъ, что $M$ будетъ какой нибудь интегрирующій множитель уравненія (1), то

$$MF=\frac{d\varphi}{dx} \tag{8}$$

Такъ, какъ $\varphi=\alpha$ есть первый интегралъ ур. (1), то функція $\varphi$ по вышедоказанному можетъ быть приведена къ виду

$$\varphi=\psi(f_1\, f_2\cdots f_n)$$

вслѣдствіе чего

$$\frac{d\varphi}{dx}=\psi'(f_1)\frac{df_1}{dx}+\psi'(f_2)\frac{df_2}{dx}+\ldots+\psi'(f_n)\frac{df_n}{dx} \tag{9}$$

и значитъ:

$$MF=\psi'(f_1)\frac{df_1}{dx}+\psi'(f_2)\frac{df_2}{dx}+\ldots+\psi'(f_n)\frac{df_n}{dx}$$

или въ силу (6)

$$MF=M_1\psi'(f_1)F+M_2\psi'(f_2)F+\ldots+M_n\psi'(f_n)F. \tag{10}$$

Обѣ части этого равенства мы можемъ сократить на $F$, не смотря на уравненіе (1), ибо оно выражаетъ, что $F=0$ только для извѣстнаго отношенія между $x$, $y$ и $n$ произв. пост. (которое называется полнымъ интеграломъ), но въ (10) зависимость $y$ отъ $x$ остается какою угодно; по сокращеніи равенства (10) на $F$, мы увидимъ, что интегрирующій множитель $M$ вида (7).

Впрочемъ, при доказательствѣ, что (7) есть самая общая форма всѣхъ интегрирующихъ множителей, можно обойтись безъ сокращенія обѣихъ частей равенства на $F$, а именно слѣдующимъ образомъ:

Изъ (6) и (8) выводимъ

$$F=\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{M}=\frac{\frac{df_1}{dx}}{M_1}=\frac{\frac{df_2}{dx}}{M_2}=\ldots=\frac{\frac{df_n}{dx}}{M_n}$$

или

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{M}=\frac{\psi'(f_1)\frac{df_1}{dx}}{M_1\psi'(f_1)}=\frac{\psi'(f_2)\frac{df_2}{dx}}{M_2\psi'(f_2)}=\ldots=\frac{\psi'(f_n)\frac{df_n}{dx}}{M_n\psi'(f_n)}$$

откуда, по свойству ряда равныхъ отношеній, имѣемъ:

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{M}=\frac{\psi'(f_1)\frac{df_1}{dx}+\psi'(f_2)\frac{df_2}{dx}+\ldots+\psi'(f_n)\frac{df_n}{dx}}{M_1\psi'(f_1)+M_2\psi'(f_2)+\ldots+M_n\psi'(f_n)}$$

Это отношеніе выражаетъ равенство двухъ дробей, числи-

тели которыхъ по (9) равны между собой и слѣд. необходимо должно существовать равенство между ихъ знаменателями и значитъ интегрирующій множитель $M$ будетъ непремѣнно вида (7).

14. Изъ общей формы (3, § 13) первыхъ интеграловъ дифференціальнаго уравненія $n$-го порядка слѣдуетъ, что оно имѣетъ безчисленное множество первыхъ интеграловъ и что всѣ они суть слѣдствія $n$ существенно различныхъ между собой первыхъ интеграловъ того же уравненія.

Поэтому, если извѣстны два первые интеграла

$$\varphi(x,y,y'\ldots y^{(n-1)})=\alpha,\ \psi(x,y,y'\ldots y^{(n-1)})=\beta$$

дифференціальнаго уравненія $n$-го порядка, то можно спросить, существенно ли различны они между собою, или одинъ изъ нихъ есть слѣдствіе другаго?

Въ послѣднемъ случаѣ функціи $\varphi$ и $\psi$ будутъ связаны отношеніемъ вида

$$\Pi(\varphi,\psi)=0$$

или

$$\psi=\theta(\varphi)$$

т. е. $\psi$ будетъ выражаться въ функціи $\varphi$.

Значитъ, изслѣдованіе вопроса I (§ 11) сводится на изслѣдованіе слѣдующаго другаго вопроса:

Даны двѣ явныя функціи $u$ и $v$ отъ $n$ перемѣнныхъ $x_1$. $x_2 \ldots x_n$ (перемѣнныя эти могутъ быть зависимы одна отъ другой, или нѣтъ); при какихъ условіяхъ $u$ можетъ быть выражено въ функціи $v$, т. е. быть вида $u=\varphi(v)$?

Англійскій геометръ Буль *) рѣшилъ подобный вопросъ, но при другихъ обстоятельствахъ, а именно онъ постановилъ одно необходимое и достаточное условіе для того, чтобы одна изъ $n$ величинъ $u_1, u_2 \ldots u_n$, изъ которыхъ каждая есть

*) Differential equations, supplementary volume p. 56.

явная функція $n$ перемѣнныхъ $x_1. x_2... x_n$, напр. $u_1$, могла быть выражена въ функціи остальныхъ $n-1$ величинъ $u_2... u_n$

Слѣд. у Буля число функцій равно числу перемѣнныхъ.

Въ разсматриваемомъ же нами случаѣ число функцій есть 2, а число перемѣнныхъ какое угодно $(=n)$.

Рѣшеніе вышепредложенныхъ вопросовъ получается, какъ слѣдствіе изъ слѣдующей теоремы:

*„Если изъ частныхъ производныхъ функцій $u$ и $v$:*

$$\begin{array}{c} \frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, \frac{du}{dx_3} \cdots \frac{du}{dx_n} \\ \frac{dv}{dx_1}, \frac{dv}{dx_2}, \frac{dv}{dx_3} \cdots \frac{dv}{dx_n} \end{array} \tag{1}$$

*составимъ всѣ опредѣлители, сочетая какой нибудь изъ вертикальныхъ столбцевъ, напр. 1-ый, съ остальными $(n-1)$ столбцами и если въ составленномъ такимъ образомъ ряду $(n-1)$ опредѣлителей*

$$\frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_2}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_2}, \frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_3}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_3} \cdots \frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_n}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_n}, \tag{2}$$

*извѣстное число $(k-1)$ какихъ нибудь опредѣлителей окажутся нулями, напр.*

$$\frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_2}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_2}=0, \frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_3}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_3}=0, \frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_k}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_k}=0 \tag{3}$$

*то одна изъ функцій $u$, $v$ можетъ быть представлена слѣдующимъ образомъ*

$$u=\varphi(v, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_n) \tag{4}$$

*т. е. въ выраженіе $u$ посредствомъ $v$ и перемѣнныхъ $x_1$ $x_2$... $x_n$ не будутъ входить тѣ к перемѣнныя $x_1$, $x_2$... $x_k$, относительно которыхъ берутся частныя производныя въ условіяхъ* (3)“.

Замѣтимъ при этомъ, что система условій (3) необходи-

явная функція $n$ перемѣнныхъ $x_1 . x_2 ... x_n$, напр. $u_1$, могла быть выражена въ функціи остальныхъ $n-1$ величинъ $u_2 ... u_n$ Слѣд. у Буля число функцій равно числу перемѣнныхъ.

Въ разсматриваемомъ же нами случаѣ число функцій есть 2, а число перемѣнныхъ какое угодно ($=n$).

Рѣшеніе вышепредложенныхъ вопросовъ получается, какъ слѣдствіе изъ слѣдующей теоремы:

„*Если изъ частныхъ производныхъ функцій* $u$ и $v$:

$$\frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, \frac{du}{dx_3} \cdots \frac{du}{dx_n}$$

$$\frac{dv}{dx_1}, \frac{dv}{dx_2}, \frac{dv}{dx_3} \cdots \frac{dv}{dx_n} \tag{1}$$

*составимъ всѣ опредѣлители, сочетая какой нибудь изъ вертикальныхъ столбцевъ, напр. 1-ый, съ остальными* $(n-1)$ *столбцами и если въ составленномъ такимъ образомъ ряду* $(n-1)$ *опредѣлителей*

$$\frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_2}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_2}, \frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_3}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_3} \cdots \frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_n}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_n}, \tag{2}$$

*извѣстное число* $(k-1)$ *какихъ нибудь опредѣлителей окажутся нулями, напр.*

$$\frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_2}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_2}=0, \frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_3}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_3}=0, \frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_k}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_k}=0 \tag{3}$$

*то одна изъ функцій* $u$, $v$ *можетъ быть представлена слѣдующимъ образомъ*

$$u=\varphi(v, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_n) \tag{4}$$

*т. е. въ выраженіе* $u$ *посредствомъ* $v$ *и перемѣнныхъ* $x_1\ x_2 \dots x_n$ *не будутъ входить тѣ к перемѣнныя* $x_1, x_2 \dots x_k$, *относительно которыхъ берутся частныя производныя въ условіяхъ* (3)".

Замѣтимъ при этомъ, что система условій (3) необходи-

мыхъ для того, чтобы $u$ была вида (4), останется въ сущности одна и таже, какой бы изъ вертикальныхъ столбцевъ (1) мы не выбрали для сочетанія сказаннымъ образомъ съ остальными $(n-1)$ столбцами.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно принять въ разсчетъ слѣдующій фактъ:

Если имѣемъ 2 уравненія:

$$\frac{du}{dx_\lambda}\frac{dv}{dx_\mu}-\frac{dv}{dx_\lambda}\frac{du}{dx_\mu}=0$$

$$\frac{du}{dx_\lambda}\frac{dv}{dx_\nu}-\frac{dv}{dx_\lambda}\frac{du}{dx_\nu}=0 \qquad (5)$$

то умножая 1-е изъ этихъ уравненій на $\frac{dv}{dx_\nu}$, 2-е на $\frac{dv}{dx_\mu}$, вычитая 1 ое ур. изъ 2-го и за тѣмъ сокращая полученное такимъ образомъ уравненіе на $\frac{dv}{dx_\lambda}$ найдемъ:

$$\frac{du}{dx_\mu}\frac{dv}{dx_\nu}-\frac{du}{dx_\nu}\frac{dv}{dx_\mu}=0. \qquad (6)$$

Для доказательства предъидущей теоремы мы воспользуемся пріемомъ, посредствомъ котораго Буль доказываетъ свою теорему относительно функціональной зависимости двухъ величинъ $u$ и $v$, изъ которыхъ каждая есть явная функція двухъ перемѣнныхъ $x$ и $y$ *).

Для простоты мы можемъ взять число $k=4$, ибо все, что будетъ сказано относительно этого значенія $k$, примѣняется отъ слова до слова и къ какому угодно $k$.

И такъ, пусть:

$$\frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_2}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_2}=0,\ \frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_3}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_3}=0,\ \frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_4}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_4}=0 \qquad (7)$$

*) Differential equations, p. 24.

Требуется доказать, что эти 3 условія необходимы и достаточны для того, чтобы функція $u$ могла быть представлена слѣдующимъ образомъ:

$$u=\varphi(v,\ x_5,\ x_6 \dots x_n) \tag{8}$$

Для доказательства необходимости условій (7) дифференцируемъ выраженіе (8) для $u$ частнымъ образомъ по $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ и замѣчая, что эти 4 перемѣнныя входятъ въ $u$ только посредствомъ $v$, получаемъ:

$$\frac{du}{dx_1}=\frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{dx_1},\quad \frac{du}{dx_2}=\frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{dx_2},\quad \frac{du}{dx_3}=\frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{dx_3},\quad \frac{du}{dx_4}=\frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{dx_4}$$

откуда:

$$\frac{d\varphi}{dv}=\frac{\frac{du}{dx_1}}{\frac{dv}{dx_1}}=\frac{\frac{du}{dx_2}}{\frac{dv}{dx_2}}=\frac{\frac{du}{dx_3}}{\frac{dv}{dx_3}}=\frac{\frac{du}{dx_4}}{\frac{dv}{dx_4}}$$

Это и есть условія (7), но только написанныя въ нѣсколько другой формѣ.

Докажемъ теперь достаточность условій (7) т. е. мы докажемъ, что если эти условія имѣютъ мѣсто, то функція $u$ всегда можетъ быть представлена въ видѣ (8).

По предположенію $u$ и $v$ суть явныя функціи $n$ перемѣнныхъ $x_1$, $x_2 \dots x_n$; пусть

$$u=f(x_1,\ x_2 \dots x_n),\quad v=F(x_1,\ x_2 \dots x_n) \tag{9}$$

Если изъ 2-го изъ этихъ уравненій опредѣлимъ $x_1$ посредствомъ $v$ $x_2 \dots x_n$ и найденное значеніе $x_1$ внесемъ въ 1-ое уравненіе, то $u$ приметъ видъ:

$$u=\psi(v,\ x_2,\ x_3 \dots x_n) \tag{10}$$

Это будетъ результатъ исключенія $x_1$ между двумя уравненіями (9); но можно показать, что если условія (7) удовлетворены, то при исключеніи $x_1$ между уравненіями (9) пе-

ремѣнныя $x_2$, $x_3$, $x_4$ сами собой выйдутъ изъ вычисленія и такимъ образомъ $u$ будетъ вида (8).

Съ этою цѣлью дифференцируемъ выраженіе (10) для $u$ по $x_2$ и замѣчая, что $x_2$ входитъ въ $u$ какъ само по себѣ такъ и посредствомъ $v$, получаемъ:

$$\frac{du}{dx_2}=\frac{d\psi}{dx_2}+\frac{d\psi}{dv}\,\frac{dv}{dx_2}$$

Дифференцируемъ (10) еще по $x_1$ при чемъ $x_1$ входитъ въ $u$ только посредствомъ $v$ и слѣд. будетъ:

$$\frac{du}{dx_1}=\frac{d\psi}{dv}\,\frac{dv}{dx_1}$$

Исключая между двумя послѣдними уравненіями $\frac{d\psi}{dv}$, находимъ:

$$\frac{du}{dx_1}\,\frac{dv}{dx_2}-\frac{du}{dx_2}\,\frac{dv}{dx_1}=-\frac{d\psi}{dx_2}\,\frac{dv}{dx_1}$$

или, въ силу 1-го изъ условій (7)

$$\frac{d\psi}{dx_2}\,\frac{dv}{dx_1}=0$$

и какъ по предположенію $v$ зависитъ отъ $x_1$, то для удовлетворенія послѣднему равенству необходимо, чтобы

$$\frac{d\psi}{dx_2}=0$$

т. е. чтобы перемѣнная $x_2$ не входила сама по себѣ въ функцію $\psi$.

Точно также на основаніи остальныхъ двухъ условій (7) докажется, что

$$\frac{d\psi}{dx_3}=0,\ \frac{d\psi}{dx_4}=0.$$

т. е. что перемѣнныя $x_3$, $x_4$ не должны входить (сами по себѣ) въ функцію $\psi$ и слѣд. выраженіе (10) для $u$ будетъ вида (8) что и д. н.

При доказательствѣ достаточности условій (7) мы исключали $x_1$ между двумя уравненіями (9); замѣтимъ теперь, что если бы мы хотѣли исключить не $x_1$, а $x_2$, то для доказательства нужно было бы замѣнить условія (7) другими условіями, а именно:

$$\frac{du}{dx_2}\frac{dv}{dx_1}-\frac{dv}{dx_2}\frac{du}{dx_1}=0,\ \frac{du}{dx_2}\frac{dv}{dx_3}-\frac{dv}{dx_2}\frac{du}{dx_3}=0,\ \frac{du}{dx_2}\frac{dv}{dx_4}-\frac{dv}{dx_2}\frac{du}{dx_4}=0, \quad (11)$$

которыя по вышесказанному относительно условій (5) и (6) равносильны съ условіями (7).

Прибавимъ еще, что функціи $u$ и $v$ могутъ не зависѣть отъ нѣкоторыхъ изъ перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, но и въ этихъ случаяхъ условія (7) или (11) будутъ необходимы и достаточны для того, чтобы $u$ была вида (8).

Напр. если $v$ не зависитъ отъ $x_1$, то $\frac{dv}{dx_1}=0$ и тогда 1-ое изъ условій (7) или (11) доставляетъ:

$$\frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_2}=0.$$

и какъ, по предположенію $v$ зависитъ отъ $x_2$, то $\frac{du}{dx_1}=0$, т. е. мы видимъ что на основаніи этого условія и $u$ не должно зависѣть отъ $x_1$.

Исключая $x_2$ между двумя уравненіями

$$u=f(x_2, x_3 \ldots x_n),\quad v=F(x_2, x_3 \ldots x_n)$$

и принимая въ разсчетъ остальные 2 условія $(11)_4$ мы докажемъ подобно предъидущему, что при этомъ исключеніи перемѣнныя $x_3$, $x_4$ выйдутъ сами собой изъ вычисленія и что слѣд. $u$ будетъ вида (8).

Такъ какъ все изложенное для $k=4$ примѣняется отъ слова до слова и къ какому угодно $k$. то теорему, высказанную на страницѣ (66) можемъ считать вполнѣ доказанною.

Изъ этой теоремы мы выводимъ слѣдующее слѣдствіе: Если даны двѣ явныя функціи $u$ и $v$ отъ $n$ перемѣнныхъ $x_1, x_2 \ldots x_n$ то для того, чтобы $u=\psi(v)$, необходимы и достаточны слѣдующіе $(n-1)$ условій:

$$\frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_2}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_2}=0,\ \frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_3}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_3}=0\ldots.\ \frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_n}-\frac{dv}{dx_1}\frac{du}{dx_n}=0$$

(т. е въ этомъ случаѣ всѣ опредѣлители ряда (2) будутъ нули)

15, Пояснимъ теперь употребленіе доказанной теоремы парою примѣровъ.

Пусть напр. даны двѣ функціи 4-хъ перемѣнныхъ $x, y, z, t$:

$$u=(t-1)^2x+2(t-1)(z+1)y+zy^2x^{-1}(z+2);\quad v=tx+zy$$

Частныя производныя этихъ функцій будутъ:

$$\frac{du}{dx}=(t-1)^2-zy^2x^{-2}(z+2)\qquad \frac{dv}{dx}=t$$

$$\frac{du}{dy}=2(t-1)(z+1)+2zx^{-1}(z+2)\qquad \frac{dv}{dy}=z$$

$$\frac{du}{dz}=2(t-1)y+2y^2x^{-1}(z+1)\qquad \frac{dv}{dz}=y$$

$$\frac{du}{dt}=2(t-1)x+2(z+1)y\qquad \frac{dv}{dt}=x$$

Если составимъ опредѣлители, сочетая первую горизонтальную линію $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ со всѣми остальными горизонтальными линіями то увидимъ, что ни одинъ изъ этихъ опредѣлителей не будетъ нулемъ; тоже самое относится и ко второй линіи $\frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}$; но сочетая 3-ю линію съ 4-ою, мы найдемъ:

$$\frac{du}{dz}\frac{dv}{dt}-\frac{dv}{dz}\frac{du}{dt}=0$$

откуда по предъидущей теоремѣ заключаемъ, что

$$u=\varphi(v,\ x,\ y)$$

и дѣйствительно

$$u=\frac{(v-x+y)^2-y^2}{x}.$$

Для 2-го примѣра мы возьмемъ слѣдующія двѣ функціи:

$$u=\frac{xy(z^2+t^2)-zt(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)(z^2-t^2)};\qquad v=\frac{(x+y)(z-t)}{(x-y)(z+t)}$$

Составивъ частную производную $u$ по $x$, найдемъ:

$$\frac{du}{dx}=\frac{Sy}{(x^2-y^2)^2(z^2-t^2)},\qquad \text{гдѣ}\quad S=4xyzt-(x^2+y^2)(z^2+t^2)$$

т. е. $S$ есть симметрическая фукція перемѣнныхъ $x$ и $y$, $z$ и $t$.

Замѣчаемъ теперь, что если въ функціи $u$ переставить одновременно $x$ и $z$, $y$ и $t$, то фукція измѣнитъ только свой знакъ, а потому

$$\frac{du}{dz}=\frac{-St}{(z^2-t^2)^2(x^2-y^2)}\quad \text{(здѣсь } S \text{ имѣетъ прежнее значеніе)}$$

вслѣдствіе чего:

$$\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}}=-\frac{y}{t}\frac{(z^2-t^2)}{(x^2-y^2)} \tag{1}$$

Далѣе, такъ какъ $u$ есть знакоперемѣнная функція $x$ и $y$, то производная $\frac{du}{dy}$ получится изъ $\frac{du}{dx}$, когда мы въ этой послѣдней переставимъ $x$ и $y$ и измѣнимъ потомъ ея знакъ; но изъ выраженія $\frac{du}{dx}$ видно, что частное $\frac{\frac{du}{dx}}{y}$ есть симметрическая функція $x$ и $y$, слѣд. имѣемъ отношеніе:

$$\frac{\frac{du}{dx}}{y} = -\frac{\frac{du}{dy}}{x} \tag{2}$$

На томъ же самомъ основанiи и:

$$\frac{\frac{du}{dz}}{t} = -\frac{\frac{du}{dt}}{z} \tag{3}$$

Три отношенiя (1), (2), (3) имѣютъ мѣсто и для функцiи $v$, ибо

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2y(z-t)}{(x-y)^2(z+t)}, \quad \frac{dv}{dz} = \frac{2t(x+y)}{(z+t)^2(x-y)}$$

и слѣд.

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{dv}{dz}} = -\frac{y(z-t)(z+t)}{t(x-y)(x+y)} \tag{4}$$

Кромѣ того $v$ есть также, какъ и $u$, знакоперемѣнная функцiя $x$ и $y$ и частное $\frac{\frac{dv}{dx}}{y}$ симметрическая функцiя тѣхъ же перемѣнныхъ, а потому подобно предыдущему:

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{y} = -\frac{\frac{dv}{dy}}{x} \tag{5}$$

По тѣмъ же причинамъ и

$$\frac{\frac{dv}{dz}}{t} = -\frac{\frac{dv}{dt}}{z} \tag{6}$$

сравнивая (1) и (4) имѣемъ: $\frac{du}{dx}\frac{dv}{dz} - \frac{dv}{dx}\frac{du}{dz} = 0$.

Дѣля одно на другое равенства (2) и (5), (3) и (6), найдемъ

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{dv}{dx}\frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz}\frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dz}\frac{du}{dt} = 0.$$

Изъ послѣднихъ трехъ равенствъ, на основаніи слѣдствія (стр. 71) нашей теоремы, заключаемъ, что: $u=\varphi(v)$ и дѣйствительно:

$$u=4(v-v^{-1})$$

16. Указанное слѣдствіе нашей теоремы доставляетъ слѣдующее рѣшеніе вопроса I-го § 12.

„*Одинъ изъ первыхъ интеграловъ*

$$\varphi(x,y,y'\dots y^{(n-1)})=\alpha, \psi(x,y,y'\dots y^{(n-1)})=\beta$$

*дифференціальнаго уравненія n-го порядка будетъ слѣдствіемъ другаго, если функціи* $\varphi$ *и* $\psi$ *тождественно удовлетворяютъ n условіямъ:*

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}=0, \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy'}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy'}=0, \dots \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy^{(n-1)}}-\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}=0,$$

*въ противномъ случаѣ, т. е. если хоть одно изъ этихъ условій не будетъ удовлетворено, оба интеграла будутъ существенно различны между собою*".

17. Для рѣшенія II-го вопроса (§ 12) мы доказываемъ слѣдующую теорему:

„ *Если интегрирующіе множители N и M дифференціальнаго уравненія n-го порядка*

$$F(x, y, y', y''\dots y^{(n)})=0. \tag{1}$$

*соотвѣтствуютъ двумъ такимъ первымъ интеграламъ этого уравненія изъ которыхъ одинъ есть слѣдствіе другаго, то частное* $\frac{N}{M}$, *будучи приравнено произвольной постоянной c, представитъ первый интегралъ дифф. уравненія* (1); *и наоборотъ если* $\frac{N}{M}=c$ *есть первый интегралъ дифф. уравненія* (1), *то одинъ изъ первыхъ интеграловъ соотвѣтствующихъ интегрирующимъ множителямъ N и M будетъ слѣдствіемъ другаго*".

Какъ въ этой теоремѣ, такъ и во всемъ послѣдующемъ мы разсматриваемъ два интегрирующіе множителя, отношеніе которыхъ есть опредѣленная постоянная величина, какъ одинъ и тотъ же интегрирующій множитель.

Пусть

$$\varphi(x, y', y \dots y^{(n-1)})=\alpha, \quad \psi(x, y, y' \dots y^{(n-1)})=\beta \tag{2}$$

будутъ первые интегралы дифф. уравненія (1), сотвѣтствующіе интегрирующимъ множителямъ $M$ и $N$. т е.

$$MF=\frac{d\varphi}{dx} \cdot NF=\frac{d\psi}{dx} \tag{3}$$

и предположимъ, что одинъ изъ первыхъ интеграловъ (2) есть слѣдствіе другаго, тогда $\psi$ есть нѣкоторая функція $\varphi$,

$$\psi=\Phi(\varphi)$$

а потому

$$\frac{d\psi}{dx}=\Phi'(\varphi)\frac{d\varphi}{dx} \tag{4}$$

Съ другой стороны, дѣля равенства (3) одно на другое, получаемъ:

$$\frac{N}{M}=\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dx}}$$

откуда, въ силу (4):

$$\frac{N}{M}=\Phi'(\varphi)$$

Но $\varphi=\alpha$ есть первый интегралъ уравненія (1); слѣд. и $\Phi'(\varphi)$ какъ функція $\varphi$, будучи приравнена произвольной постоянной:

$$\Phi'(\varphi)=\frac{N}{M}=c \tag{5}$$

будетъ тоже первымъ интеграломъ уравненія (1).

Такимъ образомъ первая часть теоремы доказана; мы видимъ при этомъ, что первый интегралъ (5) не отличается существенно отъ каждаго изъ интеграловъ (2).

Переходимъ къ доказательству второй части нашей теоремы:

Мы теперь предполагаемъ только, что:

$$\frac{N}{M} = c$$

есть первый интегралъ дифф. уравненія (1)

По общей формѣ первыхъ интеграловъ (стр 61) имѣемъ

$$\frac{N}{M} = \omega(f_1, f_2 \dots f_n) \tag{6}$$

гдѣ $f_1 = \alpha_1$, $f_2 = \alpha_2 \dots f_n = \alpha_n$ суть $n$ существенно различныхъ первыхъ интеграловъ уравненія (1).

Далѣе, по общей формѣ интегрирующихъ множителей (стр. 63) пишемъ:

$$N = \Pi'(f_1)M_1 + \Pi'(f_2)M_2 + \dots + \Pi'(f_n)M_n$$

$$M = \Omega'(f_1)M_1 + \Omega'(f_2)M_2 + \dots + \Omega'(f_n)M_n$$

при чемъ

$$\Pi(f_1, f_2 \dots f_n) = \beta \text{ и } \Omega(f_1, f_2 \dots f_n) = \alpha$$

будутъ первые интегралы, соотвѣтствующіе интегрирующимъ множителямъ $N$ и $M$.

Вслѣдствіе этого равенство (6) принимаетъ видъ:

$$\frac{\Pi'(f_1)M_1 + \Pi'(f_2)M_2 + \dots + \Pi'(f_n)M_n}{\Omega'(f_1)M_1 + \Omega'(f_2) M_2 + \dots + \Omega'(f_n)M_n} = \omega(f_1, f_2 \dots f_n)$$

Замѣняя здѣсь $M_1, M_2 \dots M_n$ пропорціональными имъ величинами $df_1$, $df_2 \dots df_n$ и уничтожая знаменателя, получимъ

$$\Pi'(f_1)df_1 + \Pi'(f_2)df_2 + \dots + \Pi'(f_n)df_n =$$

$$= \omega(f_1, f_2 \dots f_n)\left[\Omega'(f_1)df_1 + \Omega'(f_2)df_2 + \dots + \Omega'(f_n)df_n\right]$$

Но $f_1 = \alpha_1$, $f_2 = \alpha_2 \ldots f_n = \alpha_n$ суть $n$ существенно различныхъ первыхъ интеграловъ; слѣд. функціи $f_1\, f_2 \ldots f_n$ независимы между собой, а потому для удовлетворенія послѣднему равенству необходимо положить:

$$\Pi'(f_1) = \omega(f_1, f_2 \ldots f_n)\Omega'(f_1),\ \Pi'(f_2) = \omega(f_1, f_2 \ldots f_n)\Omega'(f_2) \ldots$$

$$\Pi'(f_n) = \omega(f_1, f_2 \ldots f_n)\Omega'(f_n)$$

откуда

$$\omega(f_1, f_2 \ldots f_n) = \frac{\Pi'(f_1)}{\Omega'(f_1)} = \frac{\Pi'(f_2)}{\Omega'(f_2)} = \ldots = \frac{\Pi'(f_n)}{\Omega'(f_n)}$$

или:

$$\frac{d\Pi}{df_1}\frac{d\Omega}{df_2} - \frac{d\Omega}{df_1}\frac{d\Pi}{df_2} = 0,\ \frac{d\Pi}{df_1}\frac{d\Omega}{df_3} - \frac{d\Omega}{df_1}\frac{d\Pi}{df_3} = 0, \ldots \frac{d\Pi}{df_1}\frac{d\Omega}{df_n} - \frac{d\Omega}{df_1}\frac{d\Pi}{df_n} = 0$$

Изъ этихъ условій, на основаніи теоремы доказанной въ § 14, мы заключаемъ, что:

$$\Pi = \varphi(\Omega)$$

т. е. одинъ изъ первыхъ интеграловъ. соотвѣтствующихъ интегрирующимъ множителямъ $N$ и $M$ есть слѣдствіе другаго.

И такъ, наша теорема вполнѣ доказана.

18 Изъ этой теоремы мы получаемъ слѣдующее рѣшеніе вопроса II го (§ 12).

(a) „*Составивъ частное интегрирующихъ множителей $N$ и $M$, приравняемъ его постоянной произвольной $c$ и посмотримъ не будетъ ли отношеніе $\frac{N}{M} = c$ первымъ интеграломъ даннаго дифференціальнаго уравненія n-го порядка; если нѣтъ, то оба первые интеграла, соотвѣтствующіе интегрирующимъ множителямъ $N$ и $M$ существенно различны между собой; въ противномъ случаѣ, т, е. если $\frac{N}{M} = c$ окажется первымъ интеграломъ даннаго дифференціальнаго уравненія, одинъ изъ первыхъ интеграловъ, соотвѣтствующихъ интегрирующимъ множителямъ $N$ и $M$, будетъ*

*слѣдствіемъ другаго; значитъ въ этомъ случаѣ оба интегрирующіе множителя $N$ и $M$ доставятъ одинъ и тотъ же интегралъ, который получится безъ интеграціи, ибо онъ есть $\frac{N}{M}=c$.“*

Изъ предъидущаго мы видимъ, что во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда частное $\frac{N}{M}$, приравненное произвольной постоянной, не можетъ быть первымъ интеграломъ дифф. уравненія $n$-го порядка, интегрирующіе множители $N$ и $M$ соотвѣтствуютъ двумъ существенно различнымъ первымъ интеграламъ.

Отсюда мы выводимъ непосредственно слѣдующее интересное слѣдствіе:

*„Если частное двухъ интегрирующихъ множителей дифф. уравненія $n$-го порядка не зависитъ отъ производной $(n-1)$-го порядка, то оба интегрирующіе множителя соотвѣтствуютъ двумъ существенно различнымъ первымъ интеграламъ“*

ибо первый интегралъ дифф. уравненія $n$-го порядка, по самому опредѣленію непремѣнно зависитъ отъ $y'^{(n-1)}$.

Для дифф. уравненій 2-го порядка $n=2$ и слѣд.

*„Если частное двухъ интегрирующихъ множителей дифф. уравненія 2-го порядка не зависитъ отъ $y'$, то эти интегрирующіе множители соотвѣтствуютъ двумъ существенно различнымъ первымъ интеграламъ“.*

И такъ:

(b) *„Два интегрирующіе множителя дифф. уравненія 2 го порядка, изъ которыхъ каждый есть функція только отъ $x$ и $y$ или отъ одной изъ этихъ перемѣнныхъ, всегда соотвѣтствуютъ двумъ существенно различнымъ первымъ интеграламъ“.*

Укажемъ еще на одно слѣдствіе теоремы § 17, а именно:

(c) *„Если будутъ извѣстны $n+1$ интегрирующихъ множителей дифф. уравненія $n$-го порядка, то по крайней мѣрѣ одинъ изъ первыхъ интеграловъ этого уравненія получится безъ интеграціи“.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть даны $n+1$ интегрирующихъ множителей

$$N_1,\ N_2 \ldots\ N_{n+1}$$

дифференціальнаго уравненія $n$-го порядка.

Мы знаемъ, что оно не допускаетъ болѣе $n$ существенно различныхъ первыхъ интеграловъ.

Значитъ, въ написанномъ ряду по крайней мѣрѣ два интегрирующіе множителя $N_r$ и $N_s$ доставляютъ одинъ и тотъ же первый интегралъ и этотъ послѣдній получится безъ интеграціи, ибо онъ есть

$$\frac{N_r}{N_s} = c.$$

19. Предложенія, полученныя нами въ послѣднемъ параграфѣ, подтверждаются и изслѣдованіями изложенными въ §§ 10 и 11.

Такъ для уравненія

$$py^{-1}y'^2 + x^{-1}y' + y'' = 0 \text{ (стр. 54)} \tag{1}$$

мы нашли 2 интегрирующіе множителя

$$N = x^{-1}yy'^{-2}, M = xy^p \tag{2}$$

Частное этихъ множителей $\frac{M}{N} = x^2y^{p-1}y'^2$, приравненное произвольной постоянной, при всякомъ $p$, отличномъ отъ —1, не будетъ первымъ интеграломъ уравненія (1); откуда по предложенію ((*a*), § 18) заключаемъ, что при всякомъ $p$, отличномъ отъ—1, оба первые интеграла, соотвѣтствующіе интегрирующимъ множителямъ (2), существенно различны.

Мы видѣли въ § 10, что это дѣйствительно имѣетъ мѣсто. Но для $p=$ 1, уравненіе (1) переходитъ въ:

$$x^{-1}y' - y^{-1}y'^2 + y'' = 0 \tag{3}$$

и частное его интегрирующихъ множителей

$$N = x^{-1}yy'^{-2},\ M = xy^{-1} \tag{4}$$

есть $\frac{M}{N}=x^2y^{-2}y'^2$, будучи приравнено произвольной постоянной $c$:

$$\frac{M}{N}=x^2y^{-2}y'^2=c$$

представляетъ первый интегралъ уравненія (3) и слѣд. (по предложенію (a)) оба интегрирующіе множители (4) доставляютъ одинъ и тотъ же интегралъ

$$xy^{-1}y'=c$$

уравненія (3).

Кромѣ двухъ интегрирующихъ множителей $N$ и $M$ уравненія (1), намъ извѣстенъ еще одинъ интегрирующій множитель того же уравненія, а именно:

$$L=\frac{1}{y'} \text{ (см. § 5)}$$

И такъ на основаніи предложенія ($c$) § 18 утверждаемъ, что по крайней мѣрѣ одно изъ частныхъ:

$$\frac{M}{N}, \frac{N}{L}, \frac{M}{L}$$

будучи приравнено произвольной постоянной, представитъ первый интегралъ уравненія (1); и дѣйствительно:

$$\frac{M}{L}=y'xy^p=c$$

есть первый интегралъ уравненія (1).

Для дифф. уравненія:

$$\left\{m\psi^{-(n-1)}(x)+n\psi'(x)\right\}y'+\psi(x)\theta(y)y'^2+\psi(x)y''=0 \text{ (стр. 58)} \quad (15)$$

мы нашли два интегрирующіе множителя

$$M=[\psi(x)]^{n-1}e^{\int\theta(y)dy}, \quad N=[\psi(x)]^{n-1}e^{\int\theta(y)dy+m\int\psi^{-n}(x)dx}$$

Каждый изъ этихъ множителей есть функція только $x$ и $y$, а потому на основаніи предложенія ($b$) § 18 непосредственно заключаемъ, что оба эти интегрирующіе множители соотвѣтствуютъ двумъ существенно различнымъ первымъ интеграламъ дифф. уравненія (5). (см. § 11).

Приведемъ еще въ примѣръ дифф. уравненіе

$$\frac{m}{n}x^{-1}y'+y''=0 \tag{6}$$

(гдѣ $m$ предполагается отличнымъ отъ $n$), для котораго мы легко можемъ написать 4 интегрирующіе множителя.

Это уравненіе есть частный случай уравненія (12) § 11 и слѣд. оно имѣетъ интегрирующій множитель $x$.

Далѣе, тоже самое уравненіе (6) получается изъ уравненія (3) § 5 для $F(y)=0$, $f(x)=\frac{m}{n}x^{-1}$ и слѣд. оно имѣетъ интегрирующіе множители

$$e^{\frac{m}{n}\int y^{-1}dx}=x^{\frac{m}{n}} \text{ и } \frac{1}{y'}.$$

Чтобы написать еще одинъ интегрирующій множитель уравненія (6), мы воспользуемся замѣчаніемъ, сдѣланнымъ Лагранжемъ относительно функціи $my'+nxy''$ *), по которому эта функція, будучи умножена на $x^{m-1}y'^{n-1}$, дѣлается полною производною отъ $x^m y'^n$.

$$x^{m-1}y'^{n-1}(my'+nxy'')=(x^m y'^n)'$$

и слѣд.

$$x^m y'^{n-1}\left(\frac{m}{n}x^{-1}y'+y''\right)=\left[\frac{x^m y'^n}{n}\right]'$$

Итакъ, уравненіе (6) имѣетъ слѣдующіе 4 интегрирующіе множителя:

$$x,\ x^{\frac{m}{n}},\ \frac{1}{y'},\ x^m y'^{n-1}$$

---

*) Leçons sur le calcul des fonctions, p. 177.

Спрашивается теперь, какіе изъ этихъ интегрирующихъ множителей, взятыхъ по парно, будутъ соотвѣтствовать существенно различнымъ первымъ интеграламъ уравненія (6)?

Мы видимъ, что интегрирующіе множители $x$ и $x^{\frac{m}{n}}$ суть функціи только $x$, и на основаніи предложенія ($b$) § 12 говоримъ, что они соотвѣтствуютъ существенно различнымъ интеграламъ.

Это дѣйствительно имѣетъ мѣсто, ибо первый интегралъ, соотвѣтствующій множителю $x$, есть:

$$\left(\frac{m}{n}-1\right)y+xy'=\alpha \quad \text{(см форм. (14) §11}$$

а множитель $x^{\frac{m}{n}}$ соотвѣтствуетъ первому интегралу

$$y'x^{\frac{m}{n}}=\beta \text{ (см. § 5).}$$

Исключая изъ обоихъ интеграловъ $y'$, имѣемъ полный интегралъ

$$\left(\frac{m}{n}-1\right)y+\beta x^{-\frac{m}{n}+1}=\alpha, \text{ или } (m-n)y+\beta x^{-\frac{(m-n)}{n}}=\alpha$$

Интегрирующіе множители $x^{\frac{m}{n}}$ и $\frac{1}{y'}$ доставляютъ одинъ и тотъ же интегралъ, ибо частное ихъ $y'x^{\frac{m}{n}}$ приравненное произвольной постоянной, будетъ интеграломъ уравненія (6 (см. предложеніе ($a$)). Тоже самое относится и къ интегрирующимъ множителямъ $\frac{1}{y'}$ и $x^m y'^{n-1}$, частное которыхъ есть $x^m y'^n=(x^{\frac{m}{n}}y')^n$.

Интегрирующіе множители

$$\frac{1}{y'} \text{ и } x,\ x^m y'^{n-1} \text{ и } x^{\frac{m}{n}},\ x^m y'^{n-1} \text{ и } x$$

по предложенію ($a$) будутъ соотвѣтствовать существенно различнымъ первымъ интеграламъ уравненія (6).

---

## ПОЛОЖЕНІЯ.

I.

Извѣстное условіе интегрируемости Эйлера и Кондорсе для функціи $n$-го порядка $F\ (x\ y\ y' \ldots\ y^{(n)})$ расположенной по степенямъ $y' \ldots y^{(n)}$ замѣняется вообще нѣсколькими условіями нъ частныхъ производныхъ коэффиціентовъ $F$ зависящихъ отъ $x$ и $y$ до $n$-го порядка включительно; но въ иныхъ случаяхъ условія эти могутъ выражаться посредствомъ частныхъ производныхъ низсшихъ порядковъ, примѣромъ чему служитъ разсматриваемый нами классъ дифференціальныхъ уравненій:

$$A + By' + Cy'^{m} + Dy'^{m+1} + Ey'^{m-1}\,y'' = 0 \qquad (A)$$

(гдѣ $A \ldots\ E$ функціи $x$ и $y$, $m$ какое угодно число отличное отъ 0).

II.

Перемѣна знака показателя $m$ въ дифференціальномъ уравненіи $(A)$ соотвѣтствуетъ перемѣнѣ перемѣнной независимой $x$ въ $y$ въ томъ же уравненіи.

III.

Если какими-нибудь средствами найдетси интегрирующій множитель уравненія $(A)$ въ которомъ $m$ отлична отъ 0, $-1$ и $+1$ независящій отъ $y'$ то коэффиціенты уравненія $(A)$ удовлетворяютъ двумъ условіямъ предписываемымъ нашей теоремой

## IV.

Вся трудность рѣшенія вопроса:

«различны-ли между собою два данные первые интеграла

$$f_1(x, y, y' \dots y^{(n-1)} \alpha)=0, \quad f_2(x, y, y' \dots y^{(n-1)}, \beta)=0$$

дифференціальнаго уравненія

$$F(x\, y\, y' \dots y^n)=0\ ?»$$

состоитъ въ приведеніи этихъ интеграловъ къ виду.

$$\varphi(x\, y\, y' \dots y^{(n-1)})=\alpha \quad \psi(x\, y\, y' \dots y^{(n-1)})=\beta.$$

## V.

Вся трудность рѣшенія вопроса:

«различны-ли между собою первые интегралы доставляемые двумя данными интегрирующими множителями $M$ и $N$ дифференціальнаго уравненія:

$$F(x\, y\, y' \dots y^{(n)})=0\ ?“.$$

состоитъ въ приведеніи этого уравненія къ виду:

$$y^{(n)}-f(x\, y\, y' \dots y^{(n-1)})=0.$$

послѣ чего вопросъ рѣшается слѣдующимъ образомъ:

Интегралы доставляемые интегрирующими множителями $M$ и $N$ будутъ слѣдствіемъ одинъ другаго или нѣтъ смотря потому будетъ-ли удовлетворено условіе:

$$\frac{d\left(\frac{N}{M}\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{N}{M}\right)}{dy}y'+\dots+\frac{d\left(\frac{N}{M}\right)}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)}+\frac{d\left(\frac{N}{M}\right)}{dy^{(n-1)}}f=0.$$

или нѣтъ.



